Contrôle de maths Terminale : aires et valeur moyenne d'une fonction

Fiche du contrôle

- **Niveau :** Terminale
- **Chapitre :** Calcul d'intégrales
- **Durée conseillée :** 2 heures
- **Barème :** sur 20 points (exercice 1 : 4 points ; exercice 2 : 5 points ; exercice 3 : 4 points ; exercice 4 : 3 points ; exercice 5 : 4 points)
- **Compétences évaluées :**
  - Calculer : déterminer une aire en unités d'aire puis en cm² par une intégrale
  - Raisonner : étudier la position relative de deux courbes avant de calculer l'aire entre elles
  - Modéliser : interpréter une valeur moyenne et un volume dans un contexte concret
  - Représenter : encadrer une intégrale par la méthode des rectangles et compléter un programme Python

Exercice 1 : Aire sous une parabole (4 points)

Calculatrice autorisée.

Soit f la fonction définie sur $[0\ ;\ 4]$ par $f(x) = -x^2 + 4x$. Dans un repère orthogonal, on prend 2 cm pour une unité sur l'axe des abscisses et 1 cm pour une unité sur l'axe des ordonnées.

a. D'abord, justifie que $f(x) \geq 0$ pour tout $x \in [0\ ;\ 4]$. *(1 point)*

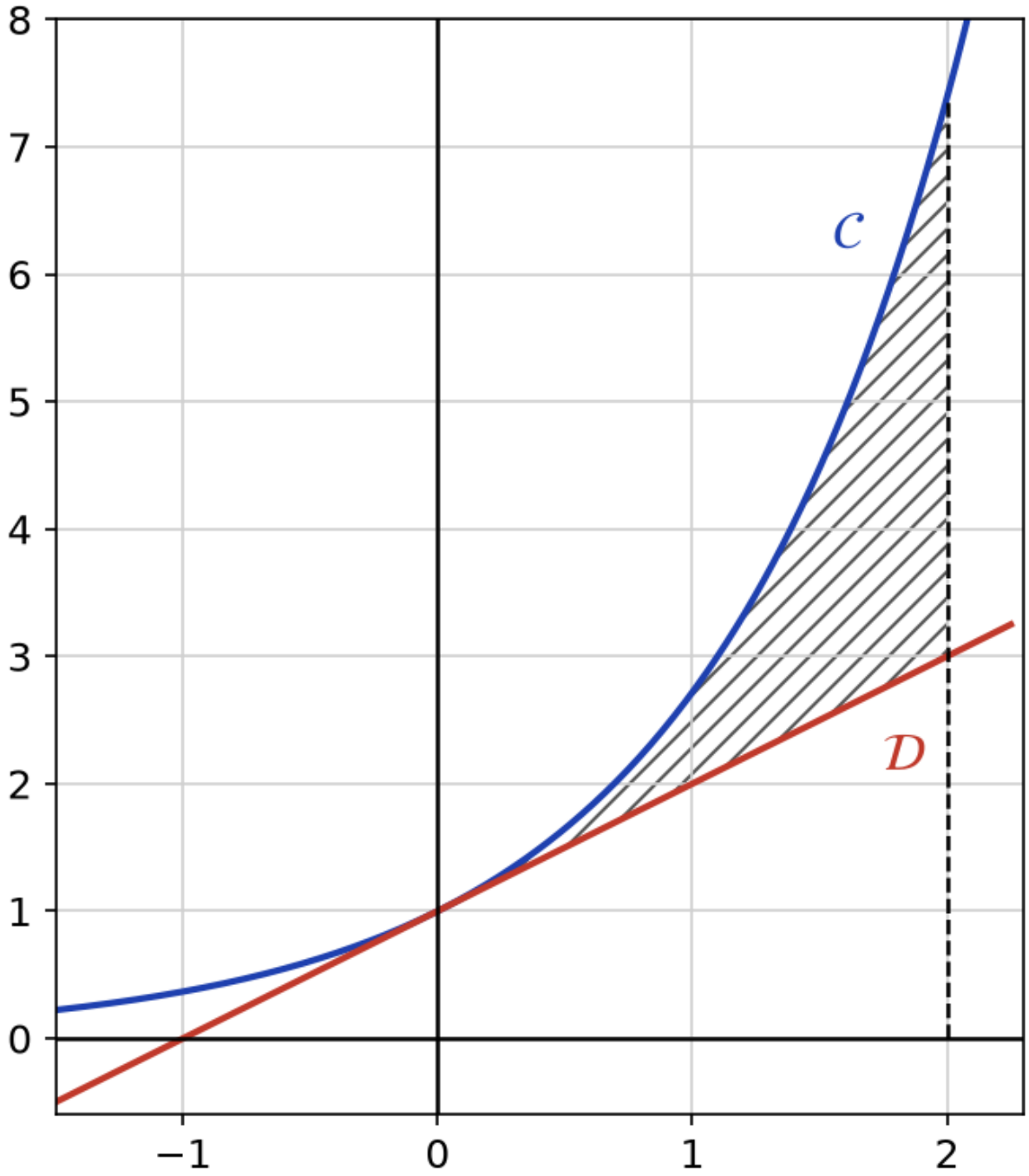
b. Ensuite, calcule, en unités d'aire, l'aire du domaine compris entre la courbe de f, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 4$. *(2 points)*

Téléchargé depuis https://mathovore.fr - Mathovore site de maths.

c. Enfin, donne cette aire en cm², en valeur exacte puis arrondie au centième. *(1 point)*

Exercice 2 : Aire entre deux courbes (5 points)

Dans un repère orthonormé d'unité graphique 2 cm, on a tracé la courbe $\mathcal{C}$ de la fonction exponentielle et la droite $\mathcal{D}$ d'équation $y = x + 1$. Le domaine hachuré est compris entre $\mathcal{C}$, $\mathcal{D}$ et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 2$.



(La figure n'est pas à l'échelle.)

On pose, pour tout réel x, $h(x) = e^x - x - 1$.

a. Étudie les variations de h sur $\mathbb{R}$, puis déduis-en le signe de $h(x)$. *(2 points)*

Téléchargé depuis https://mathovore.fr - Mathovore site de maths.

b. Déduis-en ainsi la position relative de $\mathcal{C}$ et de $\mathcal{D}$. *(0,5 point)*

c. Calcule alors la valeur exacte de l'aire $\mathcal{A}$ du domaine hachuré, en unités d'aire. *(1,5 point)*

d. Enfin, donne $\mathcal{A}$ en cm², arrondie au centième. *(1 point)*

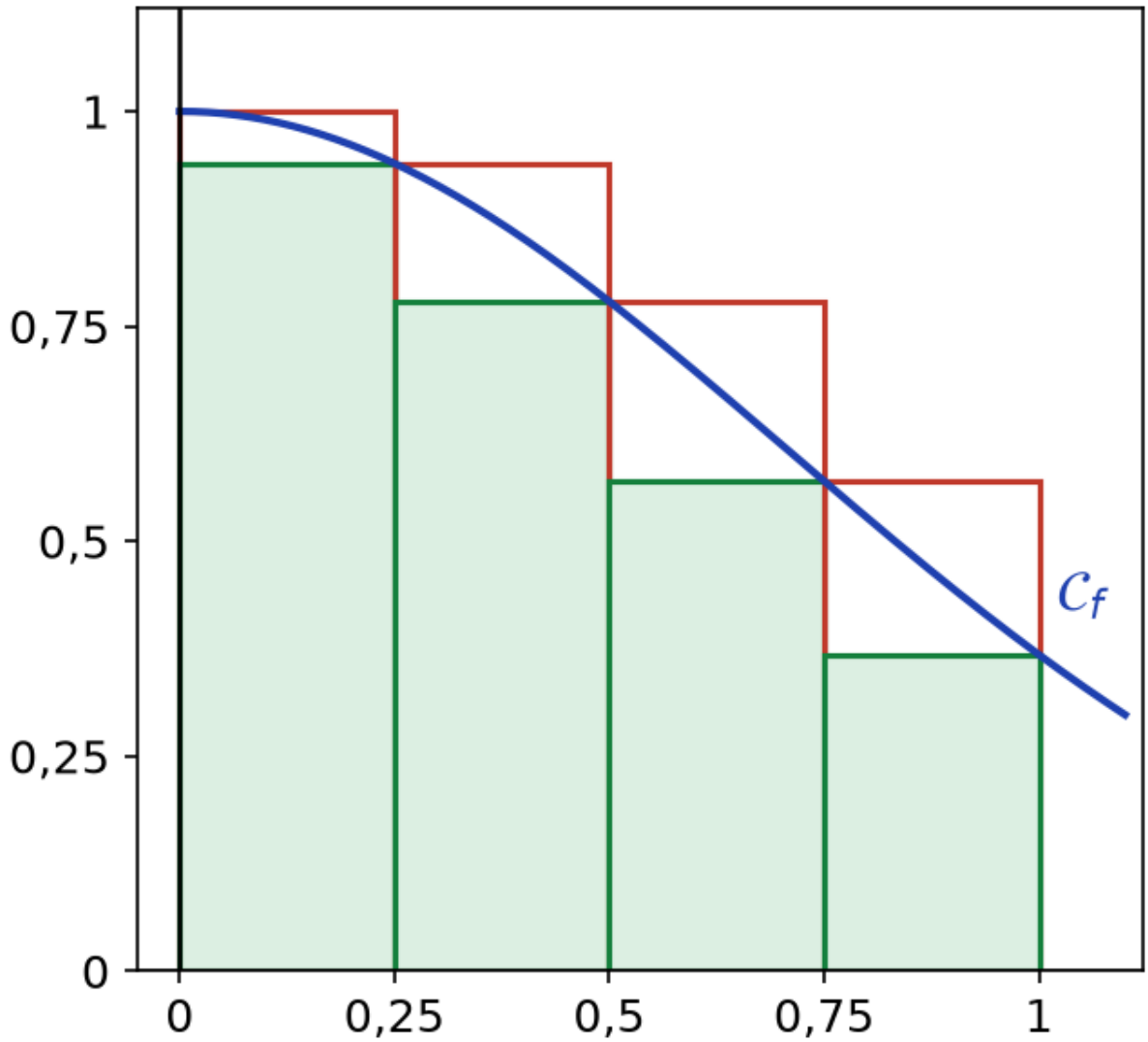
Exercice 3 : Valeurs moyennes (4 points)

a. Calcule la valeur moyenne de la fonction $g : x \to 3x^2 + 1$ sur l'intervalle $[0\ ;\ 2]$. *(1,5 point)*

b. Dans une serre, la température, en °C, t heures après 6 h du matin, est modélisée par $T(t) = 20 + 5\sin\left(\frac{\pi\, t}{12}\right)$ pour $t \in [0\ ;\ 12]$. Détermine la valeur exacte de la température moyenne dans la serre entre 6 h et 18 h. Donne-la ensuite arrondie au centième. *(2,5 points)*

Exercice 4 : La méthode des rectangles (3 points)

On note f la fonction définie sur $[0\ ;\ 1]$ par $f(x) = e^{-x^2}$ et $I = \int_0^1 f(x)\, dx$. Or on ne connaît pas de primitive de f exprimée avec les fonctions usuelles. On cherche donc un encadrement de I. Pour cela, on partage $[0\ ;\ 1]$ en n intervalles de même longueur h. Puis, sur chacun, on construit un rectangle sous la courbe et un rectangle au-dessus. Par exemple, la figure montre le cas $n = 4$: rectangles verts sous la courbe, rectangles rouges au-dessus.



a. Montre que f est décroissante sur $[0\ ;\ 1]$. Explique alors pourquoi la somme des aires des rectangles verts est inférieure ou égale à I. *(1 point)*

b. Complète les deux lignes en pointillés du programme Python ci-dessous. Ainsi, `rectangles(n)` doit renvoyer la somme s des aires des rectangles sous la courbe et la somme S des aires des rectangles au-dessus. *(1 point)*

```
from math import exp

def f(x):
return exp(-x**2)

def rectangles(n):
h = ..........
s = 0
S = 0
```

Téléchargé depuis https://mathovore.fr - Mathovore site de maths.

```
    for k in range(n):
    s = s + h*f((k+1)*h)
    S = ....................
    return s, S
```

c. L'appel `rectangles(100)` renvoie environ `(0.74366, 0.74998)`. Déduis-en donc un encadrement de I d'amplitude 10^{-2}. *(1 point)*

Exercice 5 : Le remplissage d'un bassin (4 points)

Un bassin est rempli par une pompe dont le débit diminue avec le temps. À l'instant t, en minutes, le débit de la pompe est $d(t) = 50e^{-0,2t}$, en litres par minute. De plus, on admet que le volume d'eau, en litres, versé entre les instants 0 et T est égal à $\int_0^T d(t)\,dt$.

a. D'abord, calcule le volume d'eau versé pendant les 10 premières minutes, en valeur exacte puis arrondi au dixième de litre. *(1,5 point)*

b. Ensuite, détermine le débit moyen de la pompe sur ces 10 minutes, arrondi au dixième. *(1 point)*

c. Enfin, au bout de combien de temps la pompe a-t-elle versé 200 litres ? Donne la valeur exacte, puis une valeur approchée à la seconde près. *(1,5 point)*

Réviser avant le contrôle : aires et valeur moyenne d'une fonction

Avant de faire ce contrôle, relis le cours « Calculs d'intégrales » en Terminale puis entraîne-toi avec les

exercices corrigés intégrales et primitives.

Retrouve tous les **contrôles de maths en Terminale** classés par chapitre, ou choisis un autre niveau sur la page contrôles de maths du CP à la Terminale.

Autres contrôles de maths en Terminale sur ce thème

- Contrôle de maths Terminale : intégrales et intégration par parties
- Contrôle de maths Terminale : dérivation et calcul intégral

Téléchargé depuis https://mathovore.fr - Mathovore site de maths.