

Contrôle de maths sup : suites récurrentes et points fixes

Fiche du contrôle

- **Niveau** : maths sup (MPSI)
- **Chapitre** : Suites particulières et suites récurrentes
- **Durée conseillée** : 2 heures
- **Barème** : sur 20 points (exercice 1 : 3 points ; exercice 2 : 5 points ; exercice 3 : 3 points ; exercice 4 : 9 points)
- **Compétences évaluées** :
 - Calculer : résoudre une récurrence linéaire d'ordre 2
 - Raisonner : justifier monotonie et convergence de $u_{n+1} = f(u_n)$
 - Représenter : tracer un escalier sur le graphe de f
 - Chercher : estimer une vitesse de convergence

Exercice 1 : Points fixes et monotonie (3 points)

Calculatrice interdite. Durée conseillée : 2 heures. Dans tout le sujet, I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$, $f : I \rightarrow I$ une fonction, $u_0 \in I$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

- On suppose I fermé et f continue sur I . Démontrez que si (u_n) converge vers un réel ℓ , alors $\ell \in I$ et $f(\ell) = \ell$. (1,5 point)
- Démontrez que si f est croissante sur I , la suite (u_n) est monotone. Démontrez ensuite que si f est décroissante sur I , les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont monotones. (1,5 point)

Exercice 2 : Récurrences linéaires d'ordre 2 (5 points)

Déterminez le terme général de chacune des suites suivantes.

- a. $u_0 = 1$, $u_1 = 4$ et $u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. (1,5 point)
- b. $v_0 = 0$, $v_1 = 1$ et $v_{n+2} = 4v_{n+1} - 4v_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. (1,5 point)
- c. $w_0 = 1$, $w_1 = 1$ et $w_{n+2} = 2w_{n+1} - 4w_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Écrivez le résultat sous forme réelle, puis dites si la suite (w_n) est bornée. (2 points)

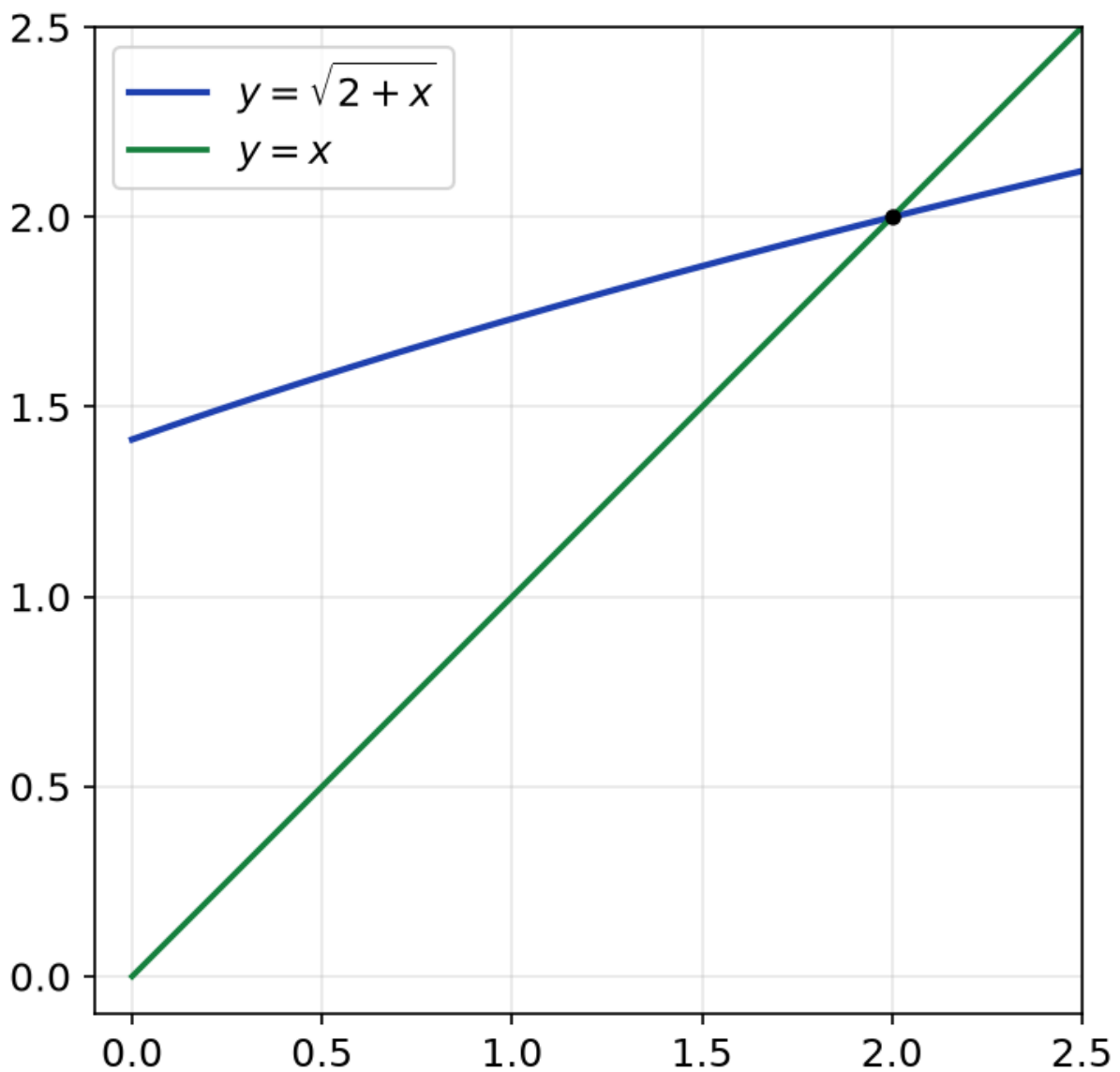
Exercice 3 : Suite arithmético-géométrique (3 points)

On définit $a_0 = 0$ et $a_{n+1} = \frac{2}{3}a_n + 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

- a. Déterminez le point fixe ℓ de $x \rightarrow \frac{2}{3}x + 1$, puis exprimez a_n en fonction de n . (1,5 point)
- b. Déterminez la limite de (a_n) et le plus petit entier n tel que $|a_n - \ell| \leq 10^{-3}$. On donne $\ln 3000 \approx 8,006$ et $\ln\left(\frac{3}{2}\right) \approx 0,405$. (1,5 point)

Exercice 4 : Problème - étude d'une suite récurrente et méthode de Newton (9 points)

Partie A. On considère $f(x) = \sqrt{2+x}$ sur $[0, +\infty[$, et la suite définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = f(u_n)$. La figure ci-dessous représente f et la droite d'équation $y = x$.



1. Montrez que l'intervalle $[0, 2]$ est stable par f . (1 point)
2. Étudiez le signe de $f(x) - x$ sur $[0, 2]$. Déduisez-en que la suite (u_n) est croissante. (1 point)
3. Démontrez que (u_n) converge et déterminez sa limite. (1,5 point)
4. Représentez les termes u_0 , u_1 , u_2 et u_3 sur l'axe des abscisses à l'aide de la figure, en traçant l'escalier correspondant. (1 point)
5. Démontrez que $|u_{n+1} - 2| \leq \frac{1}{2}|u_n - 2|$ pour tout n . Déduisez-en que $|u_n - 2| \leq 2^{1-n}$, puis un rang à partir duquel u_n approche 2 à 10^{-6} près. (1,5 point)

Partie B : méthode de Newton. On cherche une valeur approchée de $\sqrt{3}$, racine positive de $g(x) = x^2 - 3$.

6. La méthode de Newton associe à $x > 0$ le réel $N(x) = x - \frac{g(x)}{g'(x)}$. Vérifiez que

$$N(x) = \frac{x^2 + 3}{2x}. \text{ (0,5 point)}$$

7. On pose $x_0 = 2$ et $x_{n+1} = N(x_n)$. Montrez que $x_{n+1} - \sqrt{3} = \frac{(x_n - \sqrt{3})^2}{2x_n}$, puis que $x_n \geq \sqrt{3}$ pour tout n . (1 point)

8. On pose $e_n = x_n - \sqrt{3}$. Montrez que $\frac{e_{n+1}}{3} \leq \left(\frac{e_n}{3}\right)^2$, puis que $e_n \leq 3 \times 10^{-2^n}$.

Déduisez-en que x_3 approche $\sqrt{3}$ à 10^{-7} près, et commentez la vitesse de convergence par rapport à la partie A. (1,5 point)



Réviser avant le contrôle : suites récurrentes et points fixes

Avant de faire ce contrôle, relisez le cours « [Suites récurrentes](#) » en maths sup puis entraînez-vous avec les **exercices corrigés** [suites récurrentes](#).

Retrouvez tous les [contrôles de maths sup classés par chapitre](#), ou choisissez un autre niveau sur la page [contrôles de maths du CP au post-bac](#).