

Contrôle de maths sup : sous-espaces vectoriels et familles libres

Fiche du contrôle

- **Niveau** : maths sup (MPSI)
- **Chapitre** : Espaces vectoriels, familles libres et génératrices
- **Durée conseillée** : 2 heures
- **Barème** : sur 20 points (exercice 1 : 3 points ; exercice 2 : 3,5 points ; exercice 3 : 4 points ; exercice 4 : 3 points ; exercice 5 : 6,5 points)
- **Compétences évaluées** :
 - Raisonner : prouver qu'une partie est ou n'est pas un sous-espace vectoriel
 - Chercher : établir la liberté d'une famille de fonctions par un argument de limite ou de dérivabilité
 - Calculer : décomposer un vecteur sur une somme directe
 - Communiquer : rédiger la caractérisation d'une somme directe

Exercice 1 : Questions de cours (3 points)

Calculatrice interdite. Dans tout le sujet, E est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel. Aucun argument de dimension n'est attendu.

- Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E . Montrez que $F \cap G$ est un sous-espace vectoriel de E . (0,5 point)
- Rappelez la définition de « la somme $F + G$ est directe ». Démontrez que $F + G$ est directe si et seulement si $F \cap G = \{0\}$. (1,5 point)
- Montrez que $F \cup G$ est un sous-espace vectoriel de E si et seulement si $F \subset G$ ou

$$G \subset F. (1 \text{ point})$$

Exercice 2 : Reconnaître des sous-espaces vectoriels (3,5 points)

Dites si chacune des parties suivantes est un sous-espace vectoriel de l'espace indiqué, en justifiant.

- $F_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + 2y - z = 0, \text{ et } x - y = 0\}$ dans $\mathbb{R}^3$. Si c'est le cas, écrivez F_1 comme un sous-espace engendré par une famille explicite. (1 point)
- $F_2 = \{P \in \mathbb{R}[X] : P(1) = 0 \text{ et } P''(0) = 0\}$ dans $\mathbb{R}[X]$. (0,5 point)
- $F_3 = \{f \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) : f(0) = 1\}$ dans $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$. (0,5 point)
- $F_4 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy = 0\}$ dans $\mathbb{R}^2$. (0,5 point)
- F_5 , ensemble des fonctions bornées de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, dans $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$. (0,5 point)
- $F_6 = \{(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : \forall n \in \mathbb{N} \ u_{n+2} = u_{n+1} + u_n\}$ dans $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. (0,5 point)

Exercice 3 : Familles de fonctions (4 points)

On travaille dans $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$. Pour $a \in \mathbb{R}$, on note $e_a : x \rightarrow e^{ax}$ et $f_a : x \rightarrow |x - a|$.

- Montrez que la famille $(e_a)_{a \in \mathbb{R}}$ est libre. (1,5 point)
- Montrez que la famille $(f_a)_{a \in \mathbb{R}}$ est libre. (1 point)
- La famille $(\sin, \cos, x \rightarrow \sin(x+1))$ est-elle libre ? (0,5 point)
- Montrez que $(\cos^2, \sin^2)$ est libre et que

$$\text{Vect}(\cos^2, \sin^2, x \rightarrow \cos(2x), x \rightarrow 1) = \text{Vect}(\cos^2, \sin^2). \text{ (1 point)}$$

Exercice 4 : Polynômes à degrés échelonnés (3 points)

- Soient $P_0, P_1, \dots, P_n$ des polynômes de $\mathbb{R}[X]$ tels que $\deg P_k = k$ pour tout k . Montrez que la famille $(P_0, \dots, P_n)$ est libre. (1,5 point)
- Montrez que la famille $\mathcal{B} = (1, X - 1, (X - 1)^2, X^3 + X)$ est libre, puis que $\text{Vect}(\mathcal{B}) = \mathbb{R}_3[X]$ en exprimant $1, X, X^2, X^3$ à l'aide de $\mathcal{B}$. (1 point)
- Écrivez $X^2 + X$ comme combinaison linéaire des vecteurs de $\mathcal{B}$. (0,5 point)

Exercice 5 : Problème : sommes directes et supplémentaires (6,5 points)

Partie A. Dans $E = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, on note $\mathcal{P}$ l'ensemble des fonctions paires et $\mathcal{I}$ celui des fonctions impaires.

- Montrez que $\mathcal{P}$ et $\mathcal{I}$ sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires de E . (1,5 point)
- Décomposez la fonction exponentielle selon $\mathcal{P} \oplus \mathcal{I}$. (0,5 point)
- Soit $\mathcal{Z} = \{f \in E : f(0) = 0\}$. Montrez que $\mathcal{P} + \mathcal{Z} = E$, mais que cette somme n'est pas directe. (0,5 point)

Partie B. Dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on note $\mathcal{S}_n$ l'ensemble des matrices symétriques et $\mathcal{A}_n$ celui des matrices antisymétriques.

- Montrez que $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{S}_n \oplus \mathcal{A}_n$. (1,5 point)

e. Décomposez $M = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 5 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ selon cette somme directe. (0,5 point)

Partie C. Dans $\mathbb{R}^3$, on pose $F = \{(x, y, z) : x + y + z = 0\}$, $G = \text{Vect}((1, 1, 1))$ et $H = \text{Vect}((1, 0, 0))$.

f. Sans argument de dimension, montrez que $\mathbb{R}^3 = F \oplus G$ et donnez la décomposition d'un vecteur (x, y, z) . (1,5 point)

g. Montrez que H est aussi un supplémentaire de F . Que peut-on en conclure ? (0,5 point)



Réviser avant le contrôle : sous-espaces vectoriels et familles libres

Avant de faire ce contrôle, relisez le cours « [Espaces vectoriels](#) » en maths sup puis entraînez-vous avec les **exercices corrigés** [espaces vectoriels](#).

Retrouvez tous les [contrôles de maths sup classés par chapitre](#), ou choisissez un autre niveau sur la page [contrôles de maths du CP au post-bac](#).