Contrôle de maths sup : sommes, binôme et formules de trigonométrie

Fiche du contrôle

- **Niveau :** maths sup (MPSI)
- **Chapitres :** Calculs algébriques : sommes, produits, inégalités + Trigonométrie et fonctions circulaires
- **Durée conseillée :** 2 heures
- **Barème :** sur 20 points (exercice 1 : 3 points ; exercice 2 : 5 points ; exercice 3 : 4 points ; exercice 4 : 4 points ; exercice 5 : 4 points)
- **Compétences évaluées :**
  - Calculer : sommes télescopiques, sommes doubles et formule du binôme
  - Raisonner : majorer une somme et encadrer une partie entière
  - Représenter : résoudre une équation ou une inéquation trigonométrique au cercle
  - Démontrer : retrouver les formules de produit et de l'angle moitié

Exercice 1 : Questions de cours (3 points)

Calculatrice interdite.

a. Pour des entiers $n \geq 1$ et $0 \leq k \leq n-1$, démontrez la relation de Pascal

$$\binom{n}{k} + [\text{eft?}]\left({}^{n}_{k+1} \rightarrow \right) = [\text{let?}]\left({}^{n+1}_{k+1}[\text{righht?}]\right)$$

à partir de l'expression des coefficients binomiaux par les factorielles. *(1,5 point)*

b. En partant des formules d'addition $\cos(a \pm b)$ et $\sin(a \pm b)$, démontrez que, pour tous réels

Téléchargé depuis https://mathovore.fr - Mathovore site de maths.

a, b, p et q,

$$\cos a \cos b = \tfrac{1}{2}\big[\cos(a+b) + \cos(a-b)\big] \text{ et } \sin p - \sin q = 2\cos\tfrac{p+q}{2}\sin\tfrac{p-q}{2}.$$

(1,5 point)

Exercice 2 : Sommes et coefficients binomiaux (5 points)

Dans tout l'exercice, n désigne un entier naturel non nul.

a. Calculez $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$ après avoir écrit $\frac{1}{k(k+1)}$ comme une différence. *(1 point)*

b. En remarquant que $k \cdot k! = (k+1)! - k!$, calculez $\sum_{k=1}^{n} k \cdot k!$. *(1 point)*

c. On pose $S_n = \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} \frac{i}{j}$. Intervertissez les sommes pour démontrer que $S_n = \frac{n(n+3)}{4}$. *(1,5 point)*

d. Calculez $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^k$. Justifiez ensuite que $k\binom{n}{k} = n[\text{let?}]\binom{n-1}{k-1}[\text{righht?}]$ pour $1 \leq k \leq n$, et déduisez-en $\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}$. *(1,5 point)*

Exercice 3 : Inégalités, valeur absolue et partie entière (4 points)

On note $\lfloor x \rfloor$ la partie entière du réel x.

a. Résolvez dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $|2x-1| \leq |x+2|$. *(1,5 point)*

b. Démontrez que, pour tout réel x, $\lfloor 2x \rfloor - 2\lfloor x \rfloor \in \{0, 1\}$. *(1 point)*

c. Démontrez que, pour tout entier $k \geq 2$, $\frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$. Déduisez-en que, pour tout entier $n \geq 1$,

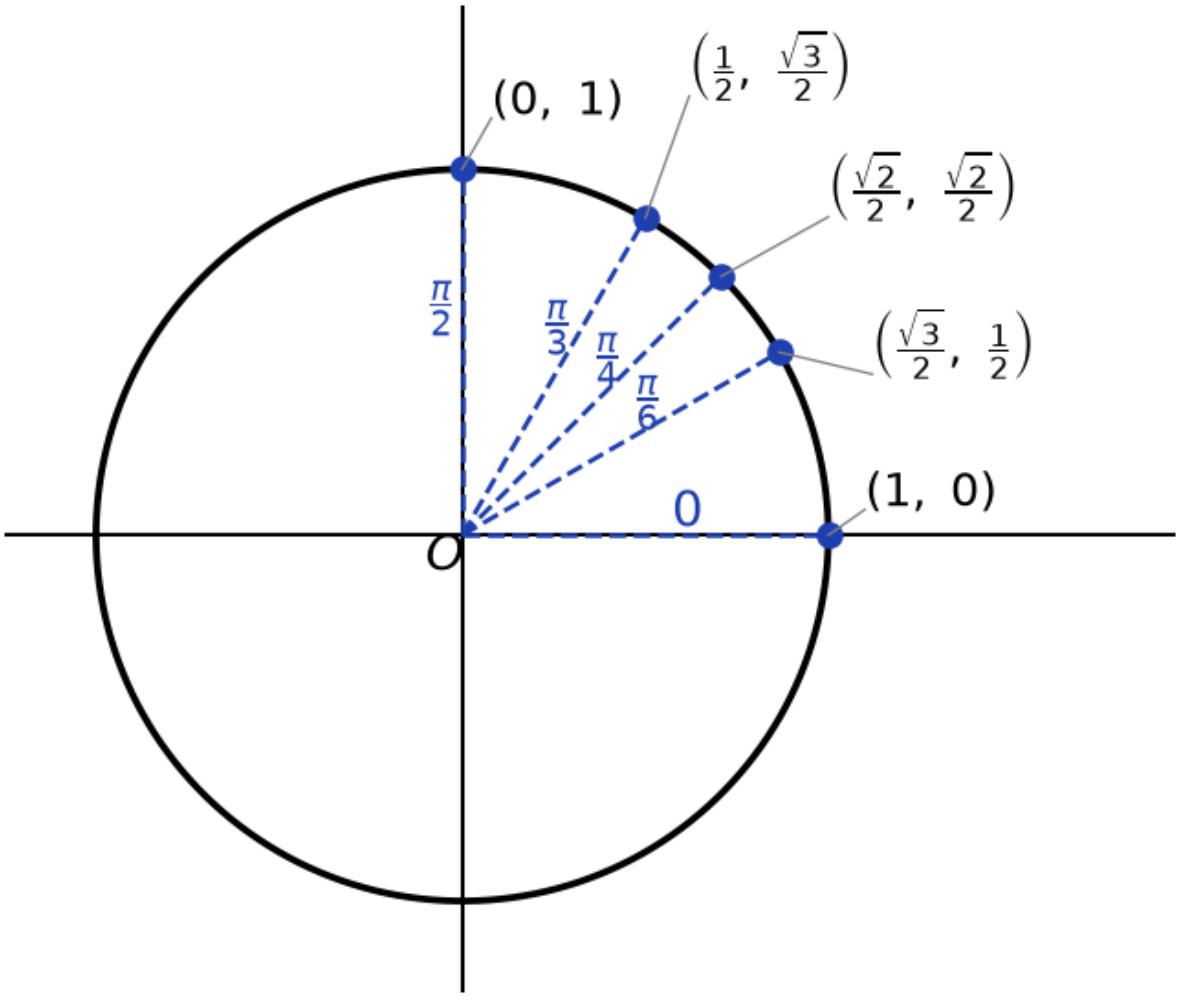
$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \leq 2 - \frac{1}{n}.$$

(1,5 point)

Exercice 4 : Équations trigonométriques (4 points)

Le cercle trigonométrique ci-dessous rappelle les angles remarquables du premier quadrant.

Téléchargé depuis https://mathovore.fr - Mathovore site de maths.



a. Résolvez dans $\mathbb{R}$ l'équation $\cos(2x) = \sin x$. *(1,5 point)*

b. Écrivez $\sin x + \sqrt{3}\cos x$ sous la forme $R\sin(x + \varphi)$ avec $R > 0$, puis résolvez dans $]-\pi, \pi]$ l'inéquation $\sin x + \sqrt{3}\cos x \geq 1$. *(1,5 point)*

c. Soit $t \in]-\pi, \pi[$ et $u = \tan\frac{t}{2}$. Démontrez que

$$\cos t = \frac{1-u^2}{1+u^2} \text{ et } \sin t = \frac{2u}{1+u^2}.$$

(1 point)

Exercice 5 : Somme des cosinus par télescopage (4 points)

Soit x un réel qui n'appartient pas à $2\pi\mathbb{Z}$, de sorte que $\sin\frac{x}{2} \neq 0$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$C_n = \sum_{k=0}^{n} \cos(kx).$$

a. Démontrez que, pour tout entier k,

$$2\sin\tfrac{x}{2}\cos(kx) = \sin\left(\left(k+\tfrac{1}{2}\right)x\right) - \sin\left(\left(k-\tfrac{1}{2}\right)x\right).$$

(1 point)

b. Déduisez-en par télescopage une expression de C_n, puis démontrez que

$$C_n = \frac{\sin\frac{(n+1)x}{2}\cos\frac{nx}{2}}{\sin\frac{x}{2}}.$$

(1,5 point)

c. Soit $n \geq 1$. Démontrez que $\sum_{k=0}^{n} \cos\frac{2k\pi}{n+1} = 0$. *(0,5 point)*

d. On suppose maintenant $x \notin \pi\mathbb{Z}$. Démontrez que

$$\sum_{k=0}^{n} \cos^2(kx) = \frac{n+1}{2} + \frac{\sin\left((n+1)x\right)\cos(nx)}{2\sin x}.$$

(1 point)

Téléchargé depuis https://mathovore.fr - Mathovore site de maths.

Réviser avant le contrôle : sommes, binôme et formules de trigonométrie

Avant de faire ce contrôle, relisez le cours « Sommes, produits et inégalités » en maths sup et « Trigonométrie » en maths sup puis entraînez-vous avec les **exercices corrigés** sommes, produits et inégalités, trigonométrie.

Retrouvez tous les **contrôles de maths sup** classés par chapitre, ou choisissez un autre niveau sur la page contrôles de maths du CP au post-bac.