

Contrôle de maths sup : séries numériques et familles sommables

Fiche du contrôle

- **Niveau** : maths sup (MPSI)
- **Chapitres** : Séries numériques + Familles sommables
- **Durée conseillée** : 3 heures
- **Barème** : sur 20 points (exercice 1 : 3 points ; exercice 2 : 4 points ; exercice 3 : 4 points ; exercice 4 : 3,5 points ; exercice 5 : 5,5 points)
- **Compétences évaluées** :
 - Raisonner : relier une suite à la série télescopique de ses différences
 - Calculer : déterminer la nature d'une série par équivalents et développements
 - Représenter : encadrer une somme partielle par des aires sous une courbe
 - Chercher : sommer une famille indexée par $\mathbb{N}^2$ par paquets ou par Fubini

Exercice 1 : Question de cours sur le lien suite-série (3 points)

Calculatrice interdite.

- a. Soit $(u_n)_{n \geq 0}$ une suite réelle. Démontrez que la suite (u_n) converge si et seulement si la série $\sum (u_{n+1} - u_n)$ converge, et exprimez alors la somme de cette série. (1 point)
- b. Déduisez-en la somme de $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n(n+1)}$ et la nature de $\sum_{n \geq 1} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$. (1 point)
- c. Vérifiez que $\frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n(n+1)} - \frac{1}{(n+1)(n+2)} \right)$ et calculez

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)} \cdot (1 \text{ point})$$

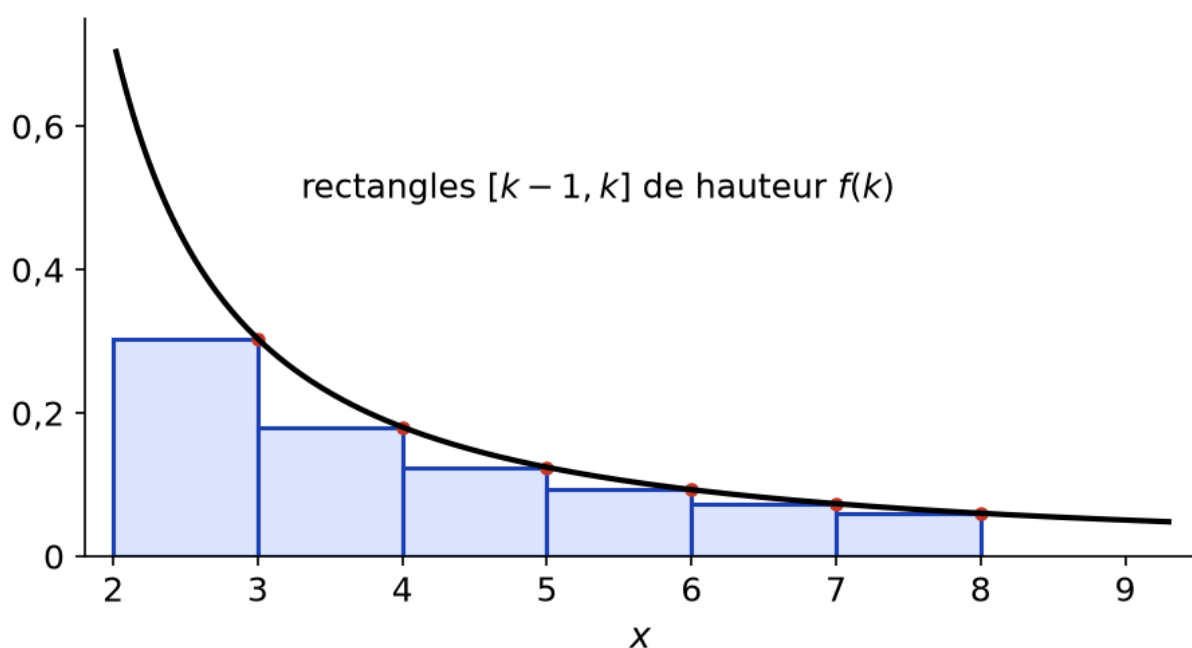
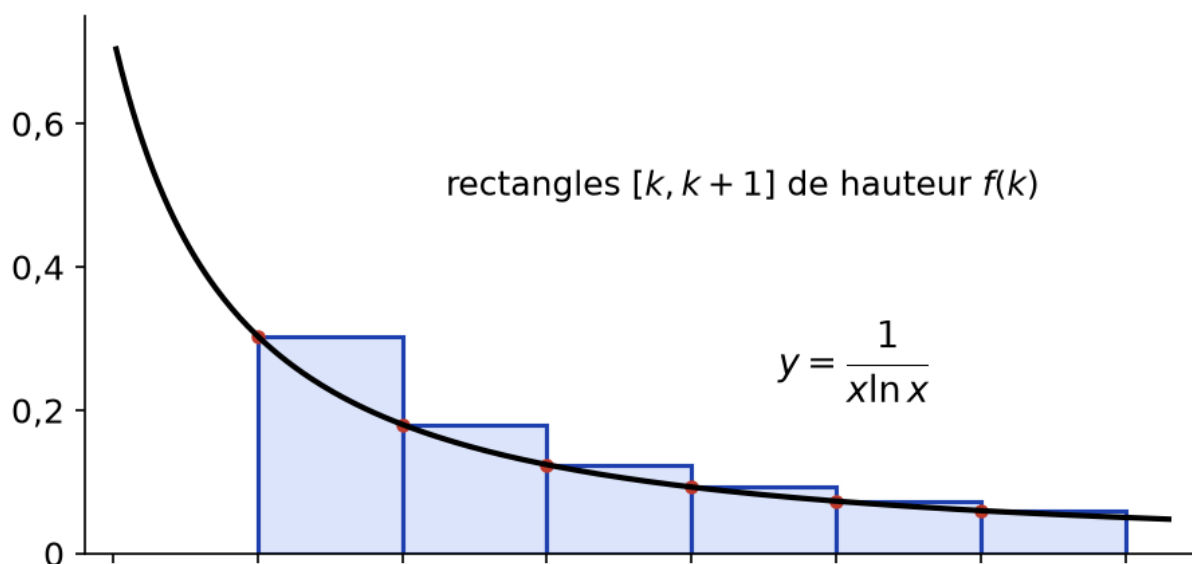
Exercice 2 : Nature de cinq séries (4 points)

Déterminez la nature de la série de terme général u_n dans chacun des cas suivants.

- a. $u_n = \frac{n^2}{n^4 + 1}$, pour $n \geq 0$. (0,5 point)
- b. $u_n = \frac{1}{\sqrt{n}} - \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$, pour $n \geq 1$. (1 point)
- c. $u_n = \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n}$, pour $n \geq 1$. (1 point)
- d. $u_n = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n^2}$, pour $n \geq 2$. (1 point)
- e. $u_n = n^{-1} + 1/n$, pour $n \geq 1$. (0,5 point)

Exercice 3 : Comparaison série-intégrale (4 points)

On pose $f(x) = \frac{1}{x \ln x}$ pour $x \geq 2$, et $S_N = \sum_{k=2}^N \frac{1}{k \ln k}$ pour $N \geq 3$.



a. Montrez que f est positive et décroissante sur $[2, +\infty[$, et donnez une primitive de f . (0,5 point)

b. En vous aidant de la figure, montrez que, pour tout entier $k \geq 3$,

$$\int_k^{k+1} f(x) dx \leq f(k) \leq \int_{k-1}^k f(x) dx. \text{ (1 point)}$$

c. Encadrez S_N , puis montrez que la série $\sum \frac{1}{n \ln n}$ diverge et que $S_N \sim \ln(\ln N)$. (1,5 point)

- d. Par la même méthode, montrez que la série $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n (\ln n)^2}$ converge. (1 point)

Exercice 4 : Une série alternée et un piège des équivalents (3,5 points)

- a. Montrez que la série $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ converge. Converge-t-elle absolument ? (1 point)
- b. On note $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}}$ le reste d'ordre n . Donnez le signe de R_n et une majoration de $|R_n|$. (0,5 point)
- c. Pour $n \geq 2$, on pose $v_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n} + (-1)^n}$. Montrez que $v_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - \frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)$, puis déduisez-en la nature de $\sum v_n$. (1,5 point)
- d. Vérifiez que $v_n \sim \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$. Pourquoi cela ne contredit-il pas le théorème de comparaison par équivalents ? (0,5 point)

Exercice 5 : Familles sommables et produit de Cauchy (5,5 points)

On admet que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ et on note $\zeta(3) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3}$.

- a. Montrez que la famille $\left(\frac{1}{p^2 q^2}\right)_{(p,q) \in (\mathbb{N}^*)^2}$ est sommable et calculez sa somme. (1 point)
- b. Pour $n \geq 2$, on note $I_n = \{(p,q) \in (\mathbb{N}^*)^2 \mid p+q = n\}$. Déterminez le cardinal de I_n , puis montrez que la famille $\left(\frac{1}{(p+q)^3}\right)_{(p,q) \in (\mathbb{N}^*)^2}$ est sommable et que sa somme vaut $\frac{\pi^2}{6} - \zeta(3)$. (1,5 point)

- c. La famille $\left(\frac{1}{(p+q)^2}\right)_{(p,q) \in (\mathbb{N}^*)^2}$ est-elle sommable ? (0,5 point)
- d. Soient $a, b \in \mathbb{C}$. Rappelez le théorème sur le produit de Cauchy de deux séries absolument convergentes, puis démontrez que $\exp(a)\exp(b) = \exp(a+b)$, où $\exp(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$. (1,5 point)
- e. Soit $x \in \mathbb{C}$ tel que $|x| < 1$. À l'aide du produit de Cauchy de $\sum x^n$ par elle-même, montrez que $\sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)x^n = \frac{1}{(1-x)^2}$. (1 point)



Réviser avant le contrôle : séries numériques et familles sommables

Avant de faire ce contrôle, relisez le cours « [Séries numériques](#) » en maths sup et « [Familles sommables](#) » en maths sup puis entraînez-vous avec les **exercices corrigés** [séries numériques](#), [familles sommables](#).

Retrouvez tous les [contrôles de maths sup classés par chapitre](#), ou choisissez un autre niveau sur la page [contrôles de maths du CP au post-bac](#).