Contrôle de maths sup : produit scalaire et projection orthogonale

Fiche du contrôle

- **Niveau :** maths sup (MPSI)
- **Chapitre :** Espaces préhilbertiens réels
- **Durée conseillée :** 3 heures
- **Barème :** sur 20 points (exercice 1 : 3 points ; exercice 2 : 4 points ; exercice 3 : 4 points ; exercice 4 : 4 points ; exercice 5 : 5 points)
- **Compétences évaluées :**
  - Vérifier qu'une application est un produit scalaire
  - Raisonner avec l'inégalité de Cauchy-Schwarz et son cas d'égalité
  - Calculer une base orthonormée par le procédé de Gram-Schmidt
  - Représenter une projection orthogonale par sa matrice et calculer une distance
  - Modéliser un problème de minimisation comme une distance à un sous-espace

Exercice 1 : Questions de cours (3 points)

Calculatrice interdite.

Dans cet exercice, E est un espace préhilbertien réel, de produit scalaire noté $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et de norme associée $\|\cdot\|$.

a. Énoncez et démontrez l'inégalité de Cauchy-Schwarz, en précisant le cas d'égalité. *(2 points)*

b. Soit F un sous-espace vectoriel de dimension finie de E. Démontrez que $E = F \oplus F^{\perp}$. Vous pourrez utiliser une base orthonormée de F. *(1 point)*

Téléchargé depuis https://mathovore.fr - Mathovore site de maths.

Exercice 2 : Deux produits scalaires (4 points)

a. Soit $n \in \mathbb{N}$. Démontrez que l'application $(P, Q) \to \langle P, Q \rangle = \int_0^1 P(t)\,Q(t)\,\mathrm{d}t$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$. *(1,5 point)*

b. Soit $n \geq 1$. Démontrez que l'application $(A, B) \to \mathrm{tr}(A^\top B)$ est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Vous exprimerez $\mathrm{tr}(A^\top B)$ à l'aide des coefficients a_{ij} et b_{ij} de A et de B. *(1,5 point)*

c. Déduisez-en que, pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $(\mathrm{tr}\ A)^2 \leq n\ \mathrm{tr}(A^\top A)$, et déterminez les matrices pour lesquelles il y a égalité. *(1 point)*

Exercice 3 : Orthonormalisation de Gram-Schmidt (4 points)

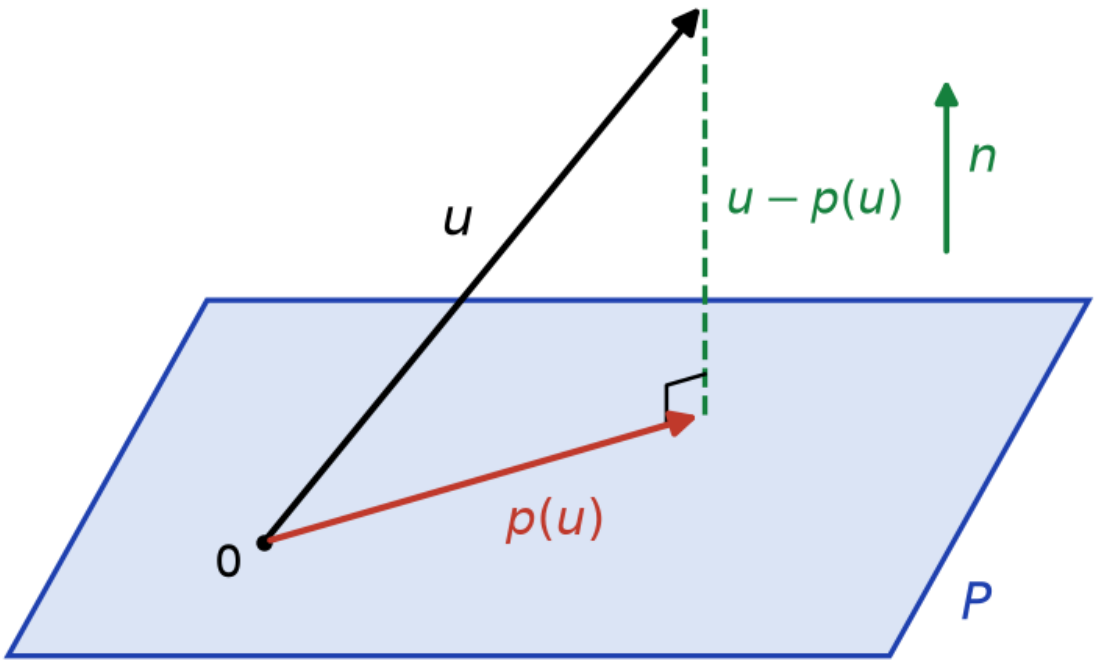
On munit $\mathbb{R}^3$ de son produit scalaire canonique. On considère les vecteurs $u_1 = (1, 1, 0)$, $u_2 = (1, 0, 1)$ et $u_3 = (0, 1, 1)$.

a. Justifiez que (u_1, u_2, u_3) est une base de $\mathbb{R}^3$, puis appliquez-lui le procédé de Gram-Schmidt. Vous obtiendrez une base orthonormée (e_1, e_2, e_3) telle que $\mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_k) = \mathrm{Vect}(u_1, \ldots, u_k)$ et $\langle e_k, u_k \rangle > 0$ pour tout k. *(2,5 points)*

b. Calculez les coordonnées du vecteur $w = (2, 0, 1)$ dans la base (e_1, e_2, e_3), puis vérifiez le résultat à l'aide de $|w|^2$. *(1,5 point)*

Exercice 4 : Projection orthogonale sur un plan (4 points)

On munit $\mathbb{R}^3$ de son produit scalaire canonique et l'on considère le plan P d'équation $x + 2y + 2z = 0$. On note p la projection orthogonale sur P et $n = (1, 2, 2)$.



(La figure n'est pas à l'échelle.)

a. Déterminez $P^{\perp}$. *(0,5 point)*

b. Démontrez que, pour tout $u \in \mathbb{R}^3$, $p(u) = u - \frac{\langle u, n \rangle}{9} n$, puis écrivez la matrice M de p dans la base canonique. *(1,5 point)*

c. Vérifiez que $M^2 = M$ et $M^{\top} = M$, puis calculez la trace de M et interprétez-la. *(1 point)*

d. Calculez le projeté orthogonal de $u = (3, 3, 0)$ sur P et la distance de u au plan P. *(1 point)*

Téléchargé depuis https://mathovore.fr - Mathovore site de maths.

Exercice 5 : Un problème de moindres carrés (5 points)

On cherche à calculer

$$m = \inf_{(a,\,b)\,\in\,\mathbb{R}^2} \int_0^1 \left(t^2 - at - b\right)^2 \mathrm{d}t.$$

On munit $\mathbb{R}_2[X]$ du produit scalaire $\langle P, Q \rangle = \int_0^1 P(t)\,Q(t)\,\mathrm{d}t$ de l'exercice 2, et l'on note $F = \mathbb{R}_1[X]$.

a. Montrez que $m = d(X^2, F)^2$, puis justifiez que cette borne inférieure est atteinte en un unique couple (a, b), que vous caractériserez à l'aide du projeté orthogonal de X^2 sur F. *(1 point)*

b. En écrivant que $X^2 - aX - b$ est orthogonal à 1 et à X, déterminez ce couple (a, b). *(1,5 point)*

c. Calculez m. *(1,5 point)*

d. Retrouvez le projeté de X^2 sur F en construisant d'abord une base orthonormée de F par le procédé de Gram-Schmidt appliqué à $(1, X)$. *(1 point)*

Réviser avant le contrôle : produit scalaire et projection orthogonale

Avant de faire ce contrôle, relisez le cours « Espaces préhilbertiens réels » en maths sup puis entraînez-vous avec les **exercices corrigés** espaces préhilbertiens réels.

Retrouvez tous les **contrôles de maths sup** classés par chapitre, ou choisissez un autre niveau sur la page contrôles de maths du CP au post-bac.

Téléchargé depuis https://mathovore.fr - Mathovore site de maths.