

Contrôle de maths sup : problème d'algèbre linéaire type concours

Fiche du contrôle

- **Niveau** : maths sup (MPSI)
- **Chapitres** : Applications linéaires et théorème du rang + Matrices, changements de base, rang et trace + Groupe symétrique et déterminants
- **Durée conseillée** : 4 heures
- **Barème** : sur 20 points (exercice 1 : 3 points ; exercice 2 : 4 points ; exercice 3 : 4 points ; exercice 4 : 5 points ; exercice 5 : 4 points)
- **Compétences évaluées** :
 - Déterminer le noyau, l'image et le rang d'un endomorphisme
 - Représenter un endomorphisme par sa matrice dans différentes bases
 - Calculer une trace et un déterminant comme invariants de similitude
 - Raisonner par stabilité, degré et dimension pour construire une base adaptée
 - Communiquer une rédaction enchaînée de type concours

Exercice 1 : Questions de cours (3 points)

Calculatrice interdite.

Le sujet est un problème : les exercices 2 à 5 en forment les parties A à D. Chaque question peut être traitée en admettant les résultats des questions précédentes, qui sont tous donnés dans l'énoncé.

- a. Soit E un espace vectoriel de dimension finie, F un espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Énoncez et démontrez le théorème du rang, en utilisant un supplémentaire du noyau de f . (2 points)

- b. Démontrez que deux matrices carrées semblables ont la même trace et le même déterminant. (1 point)

Exercice 2 : Partie A, un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ (4 points)

Dans tout le problème, $n \geq 1$ est un entier fixé. Pour $P \in \mathbb{R}_n[X]$, on pose

$$u(P) = (X^2 - 1) P'' + X P'.$$

On note $\mathcal{B} = (1, X, \dots, X^n)$ la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$ et A la matrice de u dans $\mathcal{B}$.

- Démontrez que u est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$. (1 point)
- Montrez que, pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $u(X^k) = k^2 X^k - k(k-1)X^{k-2}$ (avec la convention $X^{k-2} = 0$ si $k < 2$). Déduisez-en la forme de la matrice A , puis écrivez-la entièrement lorsque $n = 3$. (1,5 point)
- Calculez la trace et le déterminant de u . (1 point)
- L'endomorphisme u est-il injectif ? Est-il un automorphisme ? (0,5 point)

Exercice 3 : Partie B, noyau, image et rang (4 points)

- Soit P un polynôme non constant de degré d et de coefficient dominant a_d . Déterminez le degré et le coefficient dominant de $u(P)$. Déduisez-en que $\text{Ker } u = \mathbb{R}_0[X]$, ensemble des polynômes constants. (1,5 point)
- Déduisez-en le rang de u . (0,5 point)
- Pour $P \in \mathbb{R}_n[X]$, on pose $g(\theta) = P(\cos \theta)$ pour $\theta \in \mathbb{R}$. Montrez que, pour tout réel θ , $u(P)(\cos \theta) = -g''(\theta)$. (1 point)

- d. On définit $\varphi : \mathbb{R}_n[X] \rightarrow \mathbb{R}$ par $\varphi(P) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} P(\cos\theta) d\theta$. Montrez que φ est une forme linéaire non nulle, puis que $\text{Im } u = \text{Ker } \varphi$. (1 point)

Exercice 4 : Partie C, une base adaptée (5 points)

- a. Soit $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$. On note $v = u - k^2 \text{id}$. Montrez que v induit un automorphisme de $\mathbb{R}_{k-1}[X]$. Déduisez-en qu'il existe un unique polynôme unitaire P_k de degré k tel que $u(P_k) = k^2 P_k$. On pose aussi $P_0 = 1$. (2 points)
- b. Déterminez P_1 , P_2 et P_3 . (1 point)
- c. Montrez que $(P_0, \dots, P_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$ et donnez la matrice D de u dans cette base. Pour $n = 3$, écrivez la matrice de passage Q de $\mathcal{B}$ à (P_0, P_1, P_2, P_3) et son inverse, puis la relation entre A , D et Q . (1 point)
- d. On admet que, pour tout $k \geq 1$, il existe un polynôme T_k de degré k et de coefficient dominant 2^{k-1} tel que $T_k(\cos\theta) = \cos(k\theta)$ pour tout réel θ . À l'aide de la partie B, montrez que $u(T_k) = k^2 T_k$ et déduisez-en P_k en fonction de T_k . (1 point)

Exercice 5 : Partie D, applications (4 points)

- a. Dans cette question, $n = 3$. Justifiez que l'équation $u(P) = X^3$ admet des solutions dans $\mathbb{R}_3[X]$, puis déterminez-les toutes. (1,5 point)
- b. Montrez que, pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $\text{Ker}(u - k^2 \text{id}) = \text{Vect}(P_k)$. Déduisez-en les endomorphismes w de $\mathbb{R}_n[X]$ qui commutent avec u , ainsi que la dimension de l'espace qu'ils forment. (1,5 point)
- c. Calculez $\det(u + \text{id})$ en fonction de n , puis sa valeur pour $n = 3$. L'endomorphisme $u + \text{id}$ est-il inversible ? (1 point)



Réviser avant le contrôle : problème d'algèbre linéaire type concours

Avant de faire ce contrôle, relisez le cours « [Applications linéaires](#) » en maths sup et « [Matrices et applications linéaires](#) » en maths sup et « [Groupe symétrique et déterminants](#) » en maths sup puis entraînez-vous avec les **exercices corrigés** [applications linéaires](#), [matrices et applications linéaires](#), [groupe symétrique et déterminants](#).

Retrouvez tous les [contrôles de maths sup classés par chapitre](#), ou choisissez un autre niveau sur la page [contrôles de maths du CP au post-bac](#).

Autres contrôles de maths sup sur ce thème

- [Contrôle de maths sup : applications linéaires et théorème du rang](#)
- [Contrôle de maths sup : hyperplans, matrices et changements de base](#)
- [Contrôle de maths sup : permutations et déterminants](#)