Contrôle de maths sup : problème d'algèbre linéaire type concours

Fiche du contrôle

- **Niveau :** maths sup (MPSI)
- **Chapitres :** Applications linéaires et théorème du rang + Matrices, changements de base, rang et trace + Groupe symétrique et déterminants
- **Durée conseillée :** 4 heures
- **Barème :** sur 20 points (exercice 1 : 3 points ; exercice 2 : 4 points ; exercice 3 : 4 points ; exercice 4 : 5 points ; exercice 5 : 4 points)
- **Compétences évaluées :**
  - Déterminer le noyau, l'image et le rang d'un endomorphisme
  - Représenter un endomorphisme par sa matrice dans différentes bases
  - Calculer une trace et un déterminant comme invariants de similitude
  - Raisonner par stabilité, degré et dimension pour construire une base adaptée
  - Communiquer une rédaction enchaînée de type concours

Exercice 1 : Questions de cours (3 points)

Calculatrice interdite.

Le sujet est un problème : les exercices 2 à 5 en forment les parties A à D. Chaque question peut être traitée en admettant les résultats des questions précédentes, qui sont tous donnés dans l'énoncé.

a. Soit E un espace vectoriel de dimension finie, F un espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Énoncez et démontrez le théorème du rang, en utilisant un supplémentaire du noyau de f. *(2 points)*

Téléchargé depuis https://mathovore.fr - Mathovore site de maths.

b. Démontrez que deux matrices carrées semblables ont la même trace et le même déterminant. *(1 point)*

Exercice 2 : Partie A, un endomorphisme de Rn[X] (4 points)

Dans tout le problème, $n \geq 1$ est un entier fixé. Pour $P \in \mathbb{R}_n[X]$, on pose

$$u(P) = (X^2 - 1)\,P'' + X\,P'.$$

On note $\mathcal{B} = (1, X, \ldots, X^n)$ la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$ et A la matrice de u dans $\mathcal{B}$.

a. Démontrez que u est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$. *(1 point)*

b. Montrez que, pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $u(X^k) = k^2 X^k - k(k-1)X^{k-2}$ (avec la convention $X^{k-2} = 0$ si $k < 2$). Déduisez-en la forme de la matrice A, puis écrivez-la entièrement lorsque $n = 3$. *(1,5 point)*

c. Calculez la trace et le déterminant de u. *(1 point)*

d. L'endomorphisme u est-il injectif ? Est-il un automorphisme ? *(0,5 point)*

Exercice 3 : Partie B, noyau, image et rang (4 points)

a. Soit P un polynôme non constant de degré d et de coefficient dominant a_d. Déterminez le degré et le coefficient dominant de $u(P)$. Déduisez-en que $\operatorname{Ker} u = \mathbb{R}_0[X]$, ensemble des polynômes constants. *(1,5 point)*

b. Déduisez-en le rang de u. *(0,5 point)*

c. Pour $P \in \mathbb{R}_n[X]$, on pose $g(\theta) = P(\cos\theta)$ pour $\theta \in \mathbb{R}$. Montrez que, pour tout réel θ, $u(P)(\cos\theta) = -g''(\theta)$. *(1 point)*

d. On définit $\varphi : \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}$ par $\varphi(P) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} P(\cos\theta)\,\mathrm{d}\theta$. Montrez que φ est une forme linéaire non nulle, puis que $\operatorname{Im} u = \operatorname{Ker} \varphi$. *(1 point)*

Exercice 4 : Partie C, une base adaptée (5 points)

a. Soit $k \in [\![1, n]\!]$. On note $v = u - k^2\,\mathrm{id}$. Montrez que v induit un automorphisme de $\mathbb{R}_{k-1}[X]$. Déduisez-en qu'il existe un unique polynôme unitaire P_k de degré k tel que $u(P_k) = k^2 P_k$. On pose aussi $P_0 = 1$. *(2 points)*

b. Déterminez P_1, P_2 et P_3. *(1 point)*

c. Montrez que $(P_0, \ldots, P_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$ et donnez la matrice D de u dans cette base. Pour $n = 3$, écrivez la matrice de passage Q de $\mathcal{B}$ à (P_0, P_1, P_2, P_3) et son inverse, puis la relation entre A, D et Q. *(1 point)*

d. On admet que, pour tout $k \geq 1$, il existe un polynôme T_k de degré k et de coefficient dominant 2^{k-1} tel que $T_k(\cos\theta) = \cos(k\theta)$ pour tout réel θ. À l'aide de la partie B, montrez que $u(T_k) = k^2 T_k$ et déduisez-en P_k en fonction de T_k. *(1 point)*

Exercice 5 : Partie D, applications (4 points)

a. Dans cette question, $n = 3$. Justifiez que l'équation $u(P) = X^3$ admet des solutions dans $\mathbb{R}_3[X]$, puis déterminez-les toutes. *(1,5 point)*

b. Montrez que, pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $\operatorname{Ker}(u - k^2\,\mathrm{id}) = \operatorname{Vect}(P_k)$. Déduisez-en les endomorphismes w de $\mathbb{R}_n[X]$ qui commutent avec u, ainsi que la dimension de l'espace qu'ils forment. *(1,5 point)*

c. Calculez $\det(u + \mathrm{id})$ en fonction de n, puis sa valeur pour $n = 3$. L'endomorphisme $u + \mathrm{id}$ est-il inversible ? *(1 point)*

Téléchargé depuis https://mathovore.fr - Mathovore site de maths.

Réviser avant le contrôle : problème d'algèbre linéaire type concours

Avant de faire ce contrôle, relisez le cours « Applications linéaires » en maths sup et « Matrices et applications linéaires » en maths sup et « Groupe symétrique et déterminants » en maths sup puis entraînez-vous avec les **exercices corrigés** applications linéaires, matrices et applications linéaires, groupe symétrique et déterminants.

Retrouvez tous les **contrôles de maths sup** classés par chapitre, ou choisissez un autre niveau sur la page contrôles de maths du CP au post-bac.

Autres contrôles de maths sup sur ce thème

- Contrôle de maths sup : applications linéaires et théorème du rang
- Contrôle de maths sup : hyperplans, matrices et changements de base
- Contrôle de maths sup : permutations et déterminants