

Contrôle de maths sup : probabilités finies, espérance et variance

Fiche du contrôle

- **Niveau** : maths sup (MPSI)
- **Chapitres** : Probabilités sur un univers fini et variables aléatoires + Espérance, variance et inégalités probabilistes
- **Durée conseillée** : 3 heures
- **Barème** : sur 20 points (exercice 1 : 3 points ; exercice 2 : 3 points ; exercice 3 : 4 points ; exercice 4 : 4 points ; exercice 5 : 6 points)
- **Compétences évaluées** :
 - Modéliser une expérience aléatoire par des événements et des variables aléatoires
 - Calculer avec les probabilités totales, la formule de Bayes et la loi d'un couple
 - Raisonner sur l'indépendance d'événements et de variables
 - Calculer une espérance par linéarité et une variance à l'aide des covariances
 - Majorer une probabilité par les inégalités de Markov et de Bienaymé-Tchebychev

Exercice 1 : Questions de cours (3 points)

Calculatrice interdite.

Dans tout le sujet, $(\Omega, \mathcal{P})$ désigne un espace probabilisé fini.

- a. Soit $(A_1, \dots, A_n)$ un système complet d'événements de probabilités non nulles et B un événement. Énoncez et démontrez la formule des probabilités totales, puis la formule de Bayes donnant $P_B(A_k)$ lorsque $P(B) > 0$. (1,5 point)

- b. Énoncez et démontrez l'inégalité de Markov pour une variable aléatoire réelle positive, puis déduisez-en l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev. (1,5 point)

Exercice 2 : Un test de dépistage (3 points)

Une maladie touche 2 % d'une population. Un test de dépistage est positif chez 95 % des personnes malades et négatif chez 90 % des personnes saines. On choisit une personne au hasard et l'on note M l'événement « la personne est malade » et T l'événement « le test est positif ».

- a. Calculez $P(T)$. (1 point)
- b. Calculez la probabilité qu'une personne dont le test est positif soit malade. Donnez-en une valeur approchée à 0,01 près et commentez. (1 point)
- c. On fait passer un second test à la personne. On admet que, conditionnellement à M comme à $\overline{M}$, les résultats T_1 et T_2 des deux tests sont indépendants et suivent les proportions ci-dessus. Calculez $P_{T_1 \cap T_2}(M)$ sous forme de fraction, puis donnez-en une valeur approchée à 0,01 près. (1 point)

Exercice 3 : Couple de variables et indépendance (4 points)

On lance deux dés équilibrés à quatre faces, numérotés de 1 à 4, de façon indépendante. On note D_1 et D_2 les résultats, $X = \min(D_1, D_2)$ et $Y = \max(D_1, D_2)$.

- a. Déterminez la loi conjointe du couple (X, Y) et présentez-la sous forme de tableau. (1,5 point)
- b. Déduisez-en les lois marginales de X et de Y , puis vérifiez que $E(X) + E(Y) = 5$. (1 point)
- c. Les variables X et Y sont-elles indépendantes ? (0,5 point)

- d. On considère les événements A : « D_1 est pair », B : « D_2 est pair » et C : « $D_1 + D_2$ est pair ». Montrez que A , B et C sont deux à deux indépendants, mais qu'ils ne sont pas mutuellement indépendants. (1 point)

Exercice 4 : Estimer une proportion (4 points)

Une pièce tombe sur pile avec une probabilité $p \in]0, 1[$ inconnue. On la lance n fois de façon indépendante et l'on note S_n le nombre de piles obtenus et $F_n = \frac{S_n}{n}$ la fréquence de piles.

- a. Donnez la loi de S_n en justifiant, puis calculez $E(F_n)$ et $V(F_n)$. (1,5 point)

- b. Montrez que $p(1-p) \leq \frac{1}{4}$, puis que, pour tout $\varepsilon > 0$,

$$P(|F_n - p| \geq \varepsilon) \leq \frac{1}{4n\varepsilon^2}.$$

(1 point)

- c. Déterminez un nombre de lancers n qui garantit $P(|F_n - p| \geq 0,05) \leq 0,05$, quelle que soit la valeur de p . (1 point)

- d. Avec ce nombre de lancers, on obtient 1 100 piles. Que peut-on dire de p ? La pièce vous paraît-elle équilibrée? (0,5 point)

Exercice 5 : Points fixes d'une permutation aléatoire (6 points)

Soit $n \geq 2$. On choisit une permutation σ de $[[1, n]]$ selon la loi uniforme sur le groupe symétrique S_n . On note N le nombre de points fixes de σ , c'est-à-dire le nombre d'entiers i tels que $\sigma(i) = i$. Pour $i \in [[1, n]]$, on note X_i la variable indicatrice de l'événement $\{\sigma(i) = i\}$.

- a. Justifiez que $P(\sigma(i) = i) = \frac{1}{n}$ pour tout i , en dénombrant les permutations qui fixent i . (1 point)

- b. Exprimez N à l'aide des X_i et déduisez-en $E(N)$. (0,5 point)
- c. Pour $i \neq j$, calculez $P(\sigma(i) = i \text{ et } \sigma(j) = j)$, puis la covariance $\text{Cov}(X_i, X_j)$. Les variables X_i et X_j sont-elles indépendantes ? (1,5 point)
- d. Démontrez que $V(N) = 1$, quel que soit $n \geq 2$. (1,5 point)
- e. À l'aide de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, montrez que $P(N \geq 3) \leq \frac{1}{4}$. (0,5 point)
- f. Dans le cas $n = 4$, déterminez la loi de N et retrouvez directement $E(N) = 1$ et $V(N) = 1$. (1 point)



Réviser avant le contrôle : probabilités finies, espérance et variance

Avant de faire ce contrôle, relisez le cours [« Probabilités sur un univers fini » en maths sup](#) et [« Espérance et variance » en maths sup](#) puis entraînez-vous avec les **exercices corrigés** [probabilités sur un univers fini](#), [espérance et variance](#).

Retrouvez tous les [contrôles de maths sup classés par chapitre](#), ou choisissez un autre niveau sur la page [contrôles de maths du CP au post-bac](#).