

Contrôle de maths sup : polynômes, racines et fractions rationnelles

Fiche du contrôle

- **Niveau** : maths sup (MPSI)
- **Chapitres** : Polynômes : division euclidienne, racines, interpolation + Arithmétique des polynômes et fractions rationnelles
- **Durée conseillée** : 3 heures
- **Barème** : sur 20 points (exercice 1 : 2,5 points ; exercice 2 : 3,5 points ; exercice 3 : 2,5 points ; exercice 4 : 2 points ; exercice 5 : 4,5 points ; exercice 6 : 5 points)
- **Compétences évaluées** :
 - Calculer : restes de divisions euclidiennes, décompositions en éléments simples et primitives
 - Raisonner : caractériser la multiplicité d'une racine par les dérivées successives
 - Chercher : exploiter les relations entre coefficients et racines
 - Communiquer : rédiger une récurrence complète sur une suite de polynômes

Exercice 1 : Questions de cours (2,5 points)

Calculatrice interdite. Dans tout le sujet, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

- a. Énoncez la formule de Taylor pour un polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$ en un point $a \in \mathbb{K}$. Déduisez-en que, pour $m \in \mathbb{N}^*$, a est racine de P d'ordre au moins m si et seulement si $P(a) = P'(a) = \dots = P^{(m-1)}(a) = 0$. (1,5 point)
- b. Soit $P = X^3 + pX^2 + qX + r \in \mathbb{C}[X]$, de racines a, b, c comptées avec multiplicité. Exprimez $a + b + c$, $ab + bc + ca$ et abc en fonction de p, q, r , en justifiant. (1 point)

Exercice 2 : Restes de divisions et racine multiple (3,5 points)

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 3.

- Déterminez le reste de la division euclidienne de X^n par $(X-1)(X-2)$. (1 point)
- Déterminez le reste de la division euclidienne de X^n par $(X-1)^2$. (1 point)
- Soit $P = X^{2n} - nX^{n+1} + nX^{n-1} - 1$. Montrez que 1 est racine de P et déterminez sa multiplicité exacte. (1,5 point)

Exercice 3 : Relations entre coefficients et racines (2,5 points)

On note a, b, c les racines complexes, comptées avec multiplicité, du polynôme $P = X^3 - 2X^2 + 3X - 5$.

- Calculez $a^2 + b^2 + c^2$. Déduisez-en que P admet au moins une racine non réelle. (1 point)
- Vérifiez que 0 n'est pas racine de P et calculez $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$. (0,5 point)
- Calculez $a^3 + b^3 + c^3$. (1 point)

Exercice 4 : Interpolation de Lagrange (2 points)

On cherche les polynômes $Q \in \mathbb{R}[X]$ tels que $Q(-1) = 4$, $Q(0) = 1$ et $Q(2) = 1$.

- Écrivez les polynômes de Lagrange L_0, L_1, L_2 associés aux points $-1, 0, 2$, et rappelez la propriété $L_i(x_j) = \delta_{ij}$. (0,5 point)
- Déterminez l'unique polynôme P de degré au plus 2 qui convient, sous forme développée puis factorisée. (1 point)
- Déterminez tous les polynômes Q de $\mathbb{R}[X]$ qui conviennent. (0,5 point)

Exercice 5 : Factorisation et éléments simples (4,5 points)

- Factorisez $X^6 - 1$ en produit de polynômes irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$, puis dans $\mathbb{R}[X]$. (1 point)
- Décomposez en éléments simples $F = \frac{1}{X(X+1)(X+2)}$. Déduisez-en, pour $N \in \mathbb{N}^*$, une expression simple de $S_N = \sum_{k=1}^N \frac{1}{k(k+1)(k+2)}$, puis la limite de S_N . (1,5 point)
- Décomposez $G = \frac{1}{X^3+1}$ en éléments simples sur $\mathbb{R}$, puis déterminez une primitive de $x \mapsto \frac{1}{x^3+1}$ sur $] -1, +\infty[$. (1 point)
- Soit $n \geq 2$ et $\omega_k = e^{2ik\pi/n}$ pour $0 \leq k \leq n-1$. Décomposez $\frac{1}{X^n - 1}$ en éléments simples sur $\mathbb{C}$. (1 point)

Exercice 6 : Problème : polynômes de Tchebychev (5 points)

On définit la suite de polynômes $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par $T_0 = 1$, $T_1 = X$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $T_{n+2} = 2X T_{n+1} - T_n$.

- Calculez T_2 , T_3 et T_4 . (0,5 point)

- b. Montrez que, pour tout $n \geq 1$, T_n est de degré n et de coefficient dominant 2^{n-1} , et que $T_n(-X) = (-1)^n T_n(X)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. (1 point)
- c. Montrez que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout réel θ , $T_n(\cos \theta) = \cos(n\theta)$. (1 point)
- d. Soit $n \geq 1$. Déterminez n racines distinctes de T_n dans $] -1, 1[$. Déduisez-en que ces racines sont simples et donnez la factorisation de T_n dans $\mathbb{R}[X]$. (1 point)
- e. Montrez que $|T_n(x)| \leq 1$ pour tout $x \in [-1, 1]$, et déterminez les réels x de $[-1, 1]$ pour lesquels $|T_n(x)| = 1$ ($n \geq 1$). (1 point)
- f. Soit $m \in \mathbb{N}^*$ et $n = 2m$. En évaluant la factorisation de d) en 0, calculez
$$\prod_{k=0}^{n-1} \cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right). \text{ (0,5 point)}$$



Réviser avant le contrôle : polynômes, racines et fractions rationnelles

Avant de faire ce contrôle, relisez le cours [« Polynômes » en maths sup](#) et [« Fractions rationnelles » en maths sup](#) puis entraînez-vous avec les **exercices corrigés** [polynômes](#), [fractions rationnelles](#).

Retrouvez tous les [contrôles de maths sup classés par chapitre](#), ou choisissez un autre niveau sur la page [contrôles de maths du CP au post-bac](#).