

Contrôle de maths sup : permutations et déterminants

Fiche du contrôle

- **Niveau** : maths sup (MPSI)
- **Chapitre** : Groupe symétrique et déterminants
- **Durée conseillée** : 2 heures
- **Barème** : sur 20 points (exercice 1 : 3,5 points ; exercice 2 : 4 points ; exercice 3 : 4 points ; exercice 4 : 4 points ; exercice 5 : 4,5 points)
- **Compétences évaluées** :
 - Raisonner : démontrer la multiplicativité du déterminant
 - Calculer : décomposer une permutation et calculer sa signature
 - Calculer : déterminants par opérations élémentaires et développement
 - Chercher : établir une relation de récurrence sur un déterminant de taille n

Exercice 1 : Question de cours sur le déterminant d'un produit (3,5 points)

Calculatrice interdite.

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension $n \geq 1$ muni d'une base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$. On admet que l'espace des formes n -linéaires alternées sur E est la droite engendrée par $\det_{\mathcal{B}}$.

- a. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Montrez que $\varphi_u : (x_1, \dots, x_n) \rightarrow \det_{\mathcal{B}}(u(x_1), \dots, u(x_n))$ est une forme n -linéaire alternée. Déduisez-en l'existence d'un scalaire, noté $\det u$, tel que $\varphi_u = \det(u) \det_{\mathcal{B}}$, et exprimez-le à l'aide de $\mathcal{B}$. (1 point)

- b. Démontrez que $\det(u \circ v) = \det(u) \det(v)$ pour $u, v \in \mathcal{L}(E)$, puis que $\det(AB) = \det(A) \det(B)$ pour $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. (1,5 point)
- c. Déduisez-en que, si A est inversible, alors $\det A \neq 0$ et $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det A}$. (1 point)

Exercice 2 : Décomposition d'une permutation de S_9 (4 points)

On considère la permutation $\sigma \in S_9$ définie par

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 4 & 1 & 6 & 7 & 9 & 2 & 5 & 8 & 3 \end{pmatrix}.$$

- Décomposez σ en produit de cycles à supports disjoints. (1 point)
- Écrivez σ comme produit de transpositions et déduisez-en sa signature $\varepsilon(\sigma)$. (1 point)
- Déterminez le plus petit entier $m \geq 1$ tel que $\sigma^m = \text{id}$. (0,5 point)
- Décomposez σ^{2026} en produit de cycles à supports disjoints. (1 point)
- Démontrez qu'un cycle de longueur $k \geq 2$ a pour signature $(-1)^{k-1}$ et retrouvez $\varepsilon(\sigma)$. (0,5 point)

Exercice 3 : Déterminants par opérations élémentaires (4 points)

- Pour $a \in \mathbb{R}$, calculez et factorisez $\Delta(a) = \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix}$. (1 point)
- Soient $n \geq 2$ et a, b deux réels. On note M la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont les coefficients diagonaux valent a et tous les autres b . Montrez que

$$\det M = (a + (n-1)b)(a-b)^{n-1}. \text{ (2 points)}$$

- c. Pour quelles valeurs du réel x les colonnes de la matrice de taille n ayant x sur la diagonale et 1 ailleurs forment-elles une base de $\mathbb{R}^n$? (1 point)

Exercice 4 : Un déterminant tridiagonal (4 points)

Pour $n \geq 1$, on note D_n le déterminant de la matrice de taille n dont les coefficients diagonaux valent 5, les coefficients situés juste au-dessus et juste au-dessous de la diagonale valent 2, et tous les autres 0 :

$$D_n = \begin{vmatrix} 5 & 2 & 0 & \dots & 0 \\ 2 & 5 & 2 & \dots & 0 \\ 0 & 2 & 5 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 2 & 2 & \dots & 5 \end{vmatrix}.$$

- Calculez D_1 et D_2 . (0,5 point)
- En développant selon la première ligne, montrez que $D_n = 5 D_{n-1} - 4 D_{n-2}$ pour tout $n \geq 3$. (1,5 point)
- Déduisez-en une expression de D_n en fonction de n . (1,5 point)
- La matrice correspondante est-elle inversible pour tout $n \geq 1$? (0,5 point)

Exercice 5 : Vandermonde, interpolation et comatrice (4,5 points)

Pour $n \geq 2$ et $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{K}$, on note $V(x_1, \dots, x_n)$ le déterminant de la matrice de taille

n dont la ligne i est $(1, x_i, x_i^2, \dots, x_i^{n-1})$.

- a. On pose $P(X) = V(x_1, \dots, x_{n-1}, X)$. Montrez que P est un polynôme de degré au plus $n-1$, de coefficient de X^{n-1} égal à $V(x_1, \dots, x_{n-1})$, qui s'annule en $x_1, \dots, x_{n-1}$. Déduisez-en par récurrence que $V(x_1, \dots, x_n) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i)$. (2 points)
- b. Soient $x_1, \dots, x_n$ deux à deux distincts et $y_1, \dots, y_n \in \mathbb{K}$. Montrez à l'aide de a) qu'il existe un unique polynôme $P \in \mathbb{K}_{n-1}[X]$ tel que $P(x_i) = y_i$ pour tout i . (1 point)
- c. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{pmatrix}$. Calculez $\det A$ grâce à a), puis la comatrice de A et A^{-1} . (1,5 point)



Réviser avant le contrôle : permutations et déterminants

Avant de faire ce contrôle, relisez le cours « [Groupe symétrique et déterminants](#) » en maths sup puis entraînez-vous avec les **exercices corrigés** [groupe symétrique et déterminants](#).

Retrouvez tous les [contrôles de maths sup classés par chapitre](#), ou choisissez un autre niveau sur la page [contrôles de maths du CP au post-bac](#).

Autres contrôles de maths sup sur ce thème

- [Contrôle de maths sup : problème d'algèbre linéaire type concours](#)