

Contrôle de maths sup : logique, ensembles et applications

Fiche du contrôle

- **Niveau** : maths sup (MPSI)
- **Chapitre** : Logique, ensembles, applications et relations
- **Durée conseillée** : 2 heures
- **Barème** : sur 20 points (exercice 1 : 4 points ; exercice 2 : 5 points ; exercice 3 : 3 points ; exercice 4 : 4 points ; exercice 5 : 4 points)
- **Compétences évaluées** :
 - Raisonner : choisir entre contraposée, absurde, analyse-synthèse et récurrence forte
 - Communiquer : écrire et nier des propositions quantifiées sans ambiguïté
 - Chercher : décrire des images directes et réciproques d'ensembles
 - Démontrer : établir l'injectivité, la surjectivité ou une relation d'équivalence ou d'ordre

Exercice 1 : Question de cours sur les applications (4 points)

Calculatrice interdite.

Dans cet exercice, E , F et G sont trois ensembles, $f : E \rightarrow F$ et $g : F \rightarrow G$ deux applications.

- Rappelez les définitions d'une application injective et d'une application surjective, en écrivant chacune avec des quantificateurs. (1 point)
- Démontrez que si $g \circ f$ est injective, alors f est injective. (1 point)

c. Démontrez que si $g \circ f$ est surjective, alors g est surjective. (1 point)

d. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $h : I \rightarrow \mathbb{R}$. Écrivez la négation de la proposition suivante, sans utiliser le symbole de négation :

$$\begin{aligned} & \forall \varepsilon > 0, \\ & , \exists \eta > 0, \\ & , \forall (x, y) \in I^2, \\ & , |x - y| \leq \eta \Rightarrow |h(x) - h(y)| \leq \varepsilon. \end{aligned}$$

(1 point)

Exercice 2 : Trois modes de raisonnement (5 points)

Pour chaque question, précisez en une phrase le type de raisonnement choisi avant de le rédiger.

a. Soit $n \in \mathbb{N}$. Démontrez par contraposition que si $n^2 - 1$ n'est pas divisible par 8, alors n est pair. (1,5 point)

b. Démontrez par l'absurde que le réel $\frac{\ln 2}{\ln 3}$ est irrationnel. (1,5 point)

c. Démontrez par analyse-synthèse que toute fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ s'écrit de manière unique comme la somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire. (2 points)

Exercice 3 : Une récurrence forte (3 points)

On définit la suite $(u_n)_n \in \mathbb{N}$ par $u_0 = 1$ et, pour tout entier $n \geq 0$,

$$u_{n+1} = u_0 + u_1 + \dots + u_n = \sum_{k=0}^n u_k.$$

- Calculez u_1 , u_2 , u_3 et u_4 , puis conjecturez une expression de u_n pour $n \geq 1$. (1 point)
- Démontrez cette conjecture par récurrence forte. Expliquez pourquoi une récurrence simple ne suffit pas ici. (2 points)

Exercice 4 : Images directes et réciproques (4 points)

On note $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ l'application définie par $f(x) = x^2$.

- Déterminez $f([-1,2])$, $f^{-1}([1,4])$ et $f^{-1}(]-\infty,0[)$. (1,5 point)
- Soit maintenant $\varphi : E \rightarrow F$ une application quelconque, A une partie de E et B une partie de F . Démontrez que $\varphi(\varphi^{-1}(B)) \subset B$ et que $A \subset \varphi^{-1}(\varphi(A))$. Démontrez ensuite que si φ est injective, alors $\varphi^{-1}(\varphi(A)) = A$. (1,5 point)
- On a toujours $\varphi(A \cap A') \subset \varphi(A) \cap \varphi(A')$ pour deux parties A et A' de E . Montrez, à l'aide de l'application f , que l'inclusion réciproque est fautive en général. (1 point)

Exercice 5 : Relation d'équivalence et relation d'ordre (4 points)

Partie A. On note g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x e^{-x}$ et, pour x et y réels, on pose $x \mathcal{R} y$ si et seulement si $g(x) = g(y)$.

- Démontrez que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence sur $\mathbb{R}$. (1 point)

- b. Étudiez les variations de g et ses limites en $-\infty$ et en $+\infty$. Déduisez-en le nombre d'éléments de la classe d'équivalence d'un réel x , selon que $x \leq 0$, $x = 1$, ou $x \in]0,1[\cup]1,+\infty[$. (1,5 point)

Partie B. Sur $\mathbb{N}^*$, on pose $a \preceq b$ si et seulement s'il existe un entier $k \geq 1$ tel que $b = a^k$.

- c. Démontrez que $\preceq$ est une relation d'ordre sur $\mathbb{N}^*$, puis qu'elle n'est pas totale. (1,5 point)



Réviser avant le contrôle : logique, ensembles et applications

Avant de faire ce contrôle, relisez le cours « [Logique, ensembles et applications](#) » en maths sup puis entraînez-vous avec les **exercices corrigés** [logique, ensembles et applications](#).

Retrouvez tous les [contrôles de maths sup classés par chapitre](#), ou choisissez un autre niveau sur la page [contrôles de maths du CP au post-bac](#).