

Contrôle de maths sup : limites, continuité et valeurs intermédiaires

Fiche du contrôle

- **Niveau** : maths sup (MPSI)
- **Chapitre** : Limites et continuité des fonctions
- **Durée conseillée** : 2 heures
- **Barème** : sur 20 points (exercice 1 : 4 points ; exercice 2 : 4 points ; exercice 3 : 3 points ; exercice 4 : 4 points ; exercice 5 : 5 points)
- **Compétences évaluées** :
 - Raisonner : prouver l'absence de limite par caractérisation séquentielle
 - Calculer : prolonger une fonction par continuité
 - Chercher : appliquer le théorème des valeurs intermédiaires
 - Démontrer : résoudre une équation fonctionnelle

Exercice 1 : Théorème de la bijection continue (4 points)

Calculatrice interdite. Durée conseillée : 2 heures. Les résultats sur la dérivabilité ne sont pas autorisés dans ce devoir.

- Énoncez le théorème de la bijection continue pour une fonction définie sur un intervalle I . (1 point)
- Soit f continue et strictement croissante sur un intervalle I . En utilisant le théorème des valeurs intermédiaires, démontrez que $f(I)$ est un intervalle, puis que f réalise une bijection de I sur $f(I)$. (1,5 point)
- Démontrez que la bijection réciproque f^{-1} est strictement croissante sur $f(I)$. (1 point)

- d. Application : justifiez que $g : x \rightarrow x + e^x$ réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$, puis donnez la valeur de $g^{-1}(1)$. (0,5 point)

Exercice 2 : Caractérisation séquentielle de la limite (4 points)

- a. Démontrez que la fonction $x \rightarrow \sin\left(\frac{1}{x}\right)$, définie sur $\mathbb{R}^*$, n'admet pas de limite en 0 . (1,5 point)
- b. On note $1_{\mathbb{Q}}$ la fonction qui vaut 1 sur $\mathbb{Q}$ et 0 sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Démontrez qu'elle n'admet de limite en aucun point $a \in \mathbb{R}$. (1,5 point)
- c. Démontrez en revanche que $x \rightarrow x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ admet une limite en 0 , que vous préciserez. (1 point)

Exercice 3 : Prolongements par continuité (3 points)

- a. Montrez que $f : x \rightarrow \frac{\sqrt{1+x}-1}{x}$, définie sur $[-1, 0[\cup]0, +\infty[$, se prolonge par continuité en 0 . (1 point)
- b. Montrez que $g : x \rightarrow x \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor$, définie sur $]0, +\infty[$, se prolonge par continuité en 0 . (1 point)
- c. Montrez que $h : x \rightarrow \lfloor x \rfloor + \sqrt{x - \lfloor x \rfloor}$ est continue sur $\mathbb{R}$. (1 point)

Exercice 4 : Valeurs intermédiaires et bornes atteintes (4 points)

- a. Soit $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ continue. Montrez que f admet un point fixe. (1 point)

- b. Soit f continue sur $[0, 1]$ telle que $f(0) = f(1)$. Montrez qu'il existe $c \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$ tel que $f\left(c + \frac{1}{2}\right) = f(c)$. (1,5 point)
- c. Soit f continue sur un segment $[a, b]$ et strictement positive. Montrez qu'il existe $m > 0$ tel que $f(x) \geq m$ pour tout $x \in [a, b]$. (0,5 point)
- d. Soit f continue sur $\mathbb{R}$ telle que $f(x) \rightarrow +\infty$ quand $x \rightarrow +\infty$ et quand $x \rightarrow -\infty$. Montrez que f admet un minimum sur $\mathbb{R}$. (1 point)

Exercice 5 : Problème - l'équation fonctionnelle de Cauchy (5 points)

On cherche les fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continues telles que, pour tous réels x et y :

$$f(x + y) = f(x) + f(y).$$

Soit f une telle fonction. On pose $a = f(1)$.

- Montrez que $f(0) = 0$ et que f est impaire. (0,5 point)
- Montrez que $f(nx) = n f(x)$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$ et tout $x \in \mathbb{R}$. (1 point)
- Déduisez-en que $f(r) = ar$ pour tout $r \in \mathbb{Q}$. (1 point)
- En utilisant la densité de $\mathbb{Q}$ et la caractérisation séquentielle de la continuité, montrez que $f(x) = ax$ pour tout réel x . Concluez. (1 point)
- Montrez qu'une fonction vérifiant la relation fonctionnelle et continue en 0 seulement est en fait continue sur $\mathbb{R}$. (0,5 point)
- Déterminez toutes les fonctions $g : \mathbb{R} \rightarrow]0, +\infty[$ continues telles que $g(x + y) = g(x)g(y)$ pour tous réels x, y . (1 point)



Réviser avant le contrôle : limites, continuité et valeurs intermédiaires

Avant de faire ce contrôle, relisez le cours « [Limites et continuité](#) » en maths sup puis entraînez-vous avec les **exercices corrigés** [limites et continuité](#).

Retrouvez tous les [contrôles de maths sup classés par chapitre](#), ou choisissez un autre niveau sur la page [contrôles de maths du CP au post-bac](#).