

Contrôle de maths sup : intégrale sur un segment et sommes de Riemann

Fiche du contrôle

- **Niveau** : maths sup (MPSI)
- **Chapitre** : Intégration sur un segment
- **Durée conseillée** : 3 heures
- **Barème** : sur 20 points (exercice 1 : 3,5 points ; exercice 2 : 4 points ; exercice 3 : 3,5 points ; exercice 4 : 4,5 points ; exercice 5 : 4,5 points)
- **Compétences évaluées** :
 - Raisonner : démontrer qu'une fonction continue positive d'intégrale nulle est nulle
 - Calculer : limites de sommes de Riemann et dérivée d'une intégrale à bornes variables
 - Chercher : étudier une suite d'intégrales et en donner un équivalent
 - Communiquer : citer précisément les théorèmes utilisés

Exercice 1 : Question de cours sur la positivité de l'intégrale (3,5 points)

Calculatrice interdite.

- a. Soient $a < b$ deux réels et f une fonction continue et positive sur $[a, b]$ telle que

$$\int_a^b f(t) dt = 0. \text{ Démontrer que } f \text{ est nulle sur } [a, b]. (1,5 \text{ point})$$

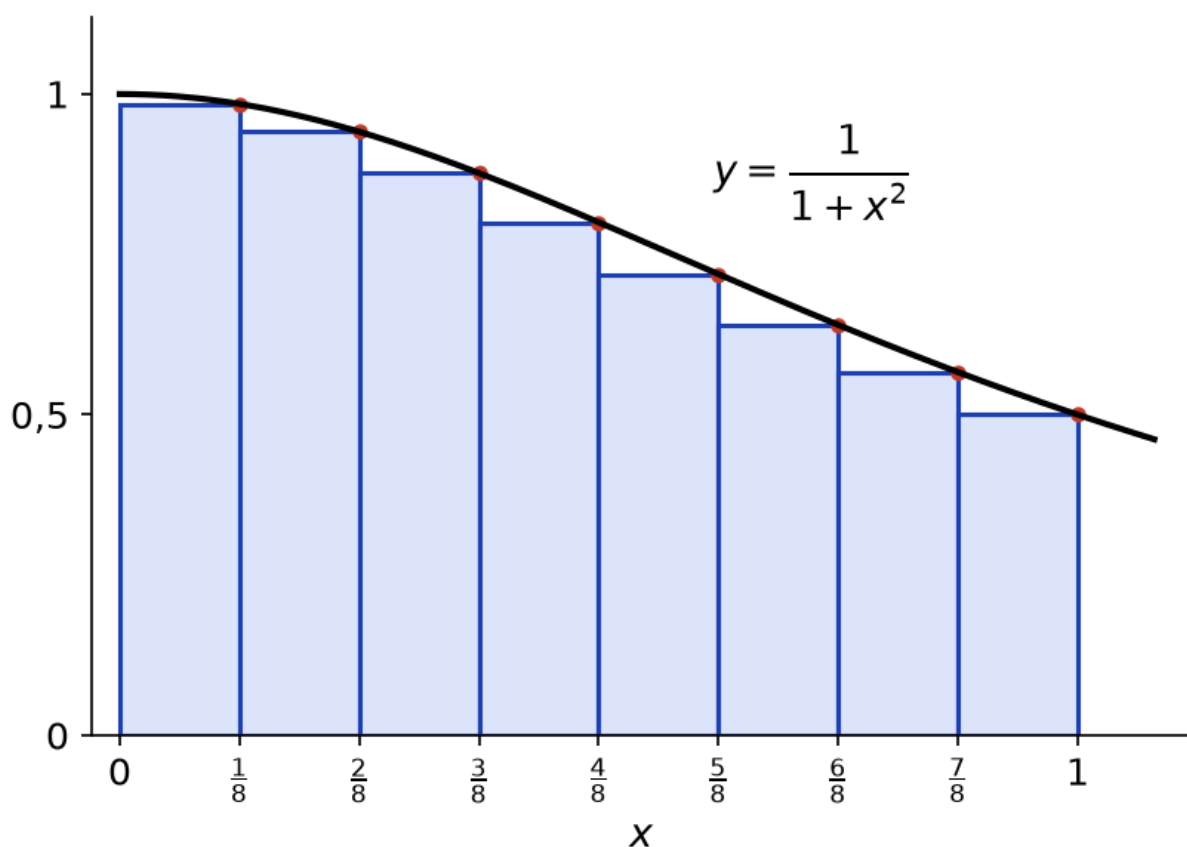
- b. Montrez par un exemple que ce résultat devient faux si f est seulement supposée continue par morceaux. (0,5 point)
- c. Déterminez toutes les fonctions f continues sur $[0, 1]$ telles que

$$\int_0^1 f(t)^2 dt - 2 \int_0^1 t f(t) dt + \frac{1}{3} = 0 \text{ . (1,5 point)}$$

Exercice 2 : Limites de sommes de Riemann (4 points)

a. Rappelez le théorème sur les sommes de Riemann d'une fonction continue sur $[0, 1]$. (0,5 point)

b. Déterminez la limite de $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{n}{n^2 + k^2}$. La figure ci-dessous représente, pour $n = 8$, des rectangles dont l'aire totale est S_8 . (1 point)



c. Déterminez la limite de $T_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}$. (1 point)

d. Déterminez la limite de $U_n = \left(\prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{k}{n} \right) \right)^{1/n}$. (1,5 point)

Exercice 3 : Une intégrale à bornes variables (3,5 points)

Pour tout réel x , on pose $G(x) = \int_x^{2x} e^{-t^2} dt$.

a. Justifiez que G est définie sur $\mathbb{R}$ et montrez qu'elle est impaire. (0,5 point)

b. Montrez que G est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculez $G'(x)$. (1 point)

c. Dressez le tableau de variations de G sur $[0, +\infty[$. (1 point)

d. Montrez que $0 \leq G(x) \leq x e^{-x^2}$ pour tout $x \geq 0$, et déduisez-en la limite de G en $+\infty$. (1 point)

Exercice 4 : Intégrales de Wallis (4,5 points)

Pour tout entier $n \geq 0$, on pose $W_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n t dt$.

a. Calculez W_0 et W_1 . (0,5 point)

b. Montrez que $W_n > 0$ pour tout n et que la suite (W_n) est décroissante. (1 point)

- c. À l'aide d'une intégration par parties, montrez que $W_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} W_n$ pour tout $n \geq 0$. (1 point)
- d. Montrez que la suite $((n+1) W_{n+1} W_n)_n \geq 0$ est constante et donnez sa valeur. (0,5 point)
- e. Montrez que $W_{n+1} \sim W_n$, puis que $W_n \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$ quand $n \rightarrow +\infty$. (1,5 point)

Exercice 5 : Formule de Taylor et approximation de e (4,5 points)

Soient $a < b$ deux réels, $n \in \mathbb{N}$ et f une fonction de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur $[a, b]$.

- a. Démontrez la formule de Taylor avec reste intégral :

$$f(b) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (b-a)^k + \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt.$$

(1,5 point)

- b. On suppose que $|f^{(n+1)}| \leq M$ sur $[a, b]$. Déduisez-en l'inégalité de Taylor-Lagrange :

$$\left| f(b) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (b-a)^k \right| \leq \frac{M (b-a)^{n+1}}{(n+1)!}. \quad (1 \text{ point})$$

- c. En l'appliquant à l'exponentielle sur $[0, 1]$ (on admet que $e < 3$), montrez que

$$\left| e - \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \right| \leq \frac{3}{(n+1)!}, \text{ puis que } \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \text{ tend vers } e. \quad (1 \text{ point})$$

- d. Trouvez le plus petit entier n pour lequel cette majoration garantit une erreur inférieure à 10^{-3} , et donnez la valeur approchée correspondante de e sous forme de fraction. (1 point)



Réviser avant le contrôle : intégrale sur un segment et sommes de Riemann

Avant de faire ce contrôle, relisez le cours « [Intégration sur un segment](#) » en maths sup puis entraînez-vous avec les **exercices corrigés** [intégration sur un segment](#).

Retrouvez tous les [contrôles de maths sup classés par chapitre](#), ou choisissez un autre niveau sur la page [contrôles de maths du CP au post-bac](#).