

Contrôle de maths sup : hyperplans, matrices et changements de base

Fiche du contrôle

- **Niveau** : maths sup (MPSI)
- **Chapitres** : Formes linéaires, hyperplans et sous-espaces affines + Matrices, changements de base, rang et trace
- **Durée conseillée** : 3 heures
- **Barème** : sur 20 points (exercice 1 : 3,5 points ; exercice 2 : 4 points ; exercice 3 : 3,5 points ; exercice 4 : 4,5 points ; exercice 5 : 4,5 points)
- **Compétences évaluées** :
 - Raisonner : démontrer $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$ et ses conséquences
 - Calculer : équations d'hyperplans, intersections et matrices de passage
 - Représenter : passer du registre géométrique au registre matriciel
 - Chercher : trouver une base où la matrice d'un endomorphisme est simple

Exercice 1 : Question de cours sur la trace (3,5 points)

Calculatrice interdite.

Dans tout le sujet, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et $n \geq 1$.

- Soient $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$. Démontrez que $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$. (1 point)
- Déduisez-en que deux matrices semblables ont la même trace. (0,5 point)

- c. Montrez qu'il n'existe pas de matrices $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telles que $AB - BA = I_n$. (1 point)
- d. Soit P un projecteur d'un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel E de dimension finie. Montrez que $\text{tr } P = \text{rg } P$. (1 point)

Exercice 2 : Formes linéaires et hyperplans de $\mathbb{R}^4$ (4 points)

Dans $E = \mathbb{R}^4$, on considère les formes linéaires $\varphi(x, y, z, t) = x + y + z + t$ et $\psi(x, y, z, t) = x - y + 2z$, puis $H_1 = \text{Ker } \varphi$ et $H_2 = \text{Ker } \psi$.

- a. Justifiez que H_1 est un hyperplan de E et donnez-en une base. (1 point)
- b. Montrez que la droite $\text{Vect}((1, 0, 0, 0))$ est un supplémentaire de H_1 . (0,5 point)
- c. Déterminez une base de $F = H_1 \cap H_2$ et sa dimension. (1,5 point)
- d. Soient α et β deux formes linéaires non nulles sur un espace vectoriel E de dimension finie, telles que $\text{Ker } \alpha = \text{Ker } \beta$. Montrez qu'il existe un réel λ tel que $\beta = \lambda \alpha$. (1 point)

Exercice 3 : Équations linéaires et sous-espaces affines (3,5 points)

- a. Dans $\mathbb{R}^3$, on considère les plans affines $\mathcal{P}_1: x + y + z = 2$ et $\mathcal{P}_2: x - y + 2z = 1$. Montrez que $\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2$ est une droite affine dont vous donnerez un point et un vecteur directeur. (1,5 point)
- b. Soit $u: \mathbb{R}_3[X] \rightarrow \mathbb{R}_3[X]$ définie par $u(P) = P - P'$. Montrez que u est un automorphisme, puis résolvez l'équation $u(P) = X^3$. (1 point)
- c. Décrivez l'ensemble $\mathcal{S}$ des $P \in \mathbb{R}_3[X]$ tels que $P'' = 6X$ comme un sous-espace affine : donnez un point, la direction et la dimension. (1 point)

Exercice 4 : Changement de base et puissances d'une matrice (4,5 points)

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ est

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

On pose $\varepsilon_1 = (1, 1, 1)$, $\varepsilon_2 = (1, -1, 0)$ et $\varepsilon_3 = (0, 1, -1)$.

- Montrez que $\mathcal{B}' = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$ et écrivez la matrice de passage P de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$. (0,5 point)
- Calculez $f(\varepsilon_1)$, $f(\varepsilon_2)$, $f(\varepsilon_3)$, puis la matrice D de f dans $\mathcal{B}'$. (1 point)
- Calculez P^{-1} en résolvant un système linéaire. (1 point)
- Justifiez que $A = PDP^{-1}$, puis montrez que, pour tout entier $k \geq 0$,
 $A^k = I_3 + \frac{4^k - 1}{3} J$, où J est la matrice dont tous les coefficients valent 1. (1 point)
- Vérifiez que $\text{tr } A = \text{tr } D$, puis déterminez le rang de $A - I_3$. (0,5 point)
- Soit q le projecteur sur $\text{Vect}(\varepsilon_1)$ parallèlement à $\text{Vect}(\varepsilon_2, \varepsilon_3)$. Montrez que sa matrice dans $\mathcal{B}$ est $\frac{1}{3} J$ et vérifiez le résultat de l'exercice 1 d). (0,5 point)

Exercice 5 : Matrices de rang 1 et similitude (4,5 points)

Soit $n \geq 2$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ de rang 1. On note J_1 la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dont le seul coefficient non nul est le coefficient $(1, 1)$, égal à 1, et E_{12} celle dont le seul coefficient non nul est le coefficient $(1, 2)$, égal à 1.

- a. En utilisant le fait que A est équivalente à J_1 , montrez qu'il existe deux matrices colonnes non nulles $X, Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ telles que $A = X Y^T$. (1 point)
- b. Montrez que $Y^T X = \text{tr } A$ (en identifiant une matrice de taille 1×1 à un scalaire), puis que $A^2 = (\text{tr } A) A$. (1 point)
- c. On suppose $\text{tr } A \neq 0$. Montrez que $\frac{1}{\text{tr } A} A$ est la matrice d'un projecteur, puis que A est semblable à $(\text{tr } A) J_1$. (1,5 point)
- d. On suppose $\text{tr } A = 0$. Montrez que A est semblable à E_{12} . Concluez : deux matrices de rang 1 de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ sont semblables si et seulement si elles ont la même trace. (1 point)



Réviser avant le contrôle : hyperplans, matrices et changements de base

Avant de faire ce contrôle, relisez le cours « [Hyperplans et sous-espaces affines](#) » en maths sup et « [Matrices et applications linéaires](#) » en maths sup puis entraînez-vous avec les **exercices corrigés hyperplans et sous-espaces affines**, [matrices et applications linéaires](#).

Retrouvez tous les [contrôles de maths sup classés par chapitre](#), ou choisissez un autre niveau sur la page [contrôles de maths du CP au post-bac](#).

Autres contrôles de maths sup sur ce thème

- [Contrôle de maths sup : problème d'algèbre linéaire type concours](#)