

Contrôle de maths sup : fonctions usuelles, réciproques et primitives

Fiche du contrôle

- **Niveau** : maths sup (MPSI)
- **Chapitres** : Fonctions usuelles et techniques de dérivation + Primitives et calcul intégral
- **Durée conseillée** : 3 heures
- **Barème** : sur 20 points (exercice 1 : 3 points ; exercice 2 : 5 points ; exercice 3 : 3 points ; exercice 4 : 5 points ; exercice 5 : 4 points)
- **Compétences évaluées** :
 - Calculer : dériver une composée ou une réciproque, calculer des primitives
 - Raisonner : simplifier une expression par étude de fonction ou par disjonction de cas
 - Démontrer : établir une inégalité par étude de fonction ou par convexité
 - Chercher : étudier une intégrale fonction de ses bornes

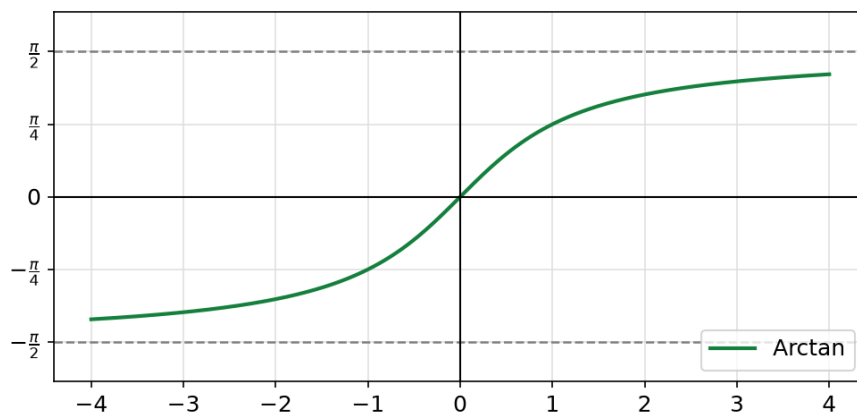
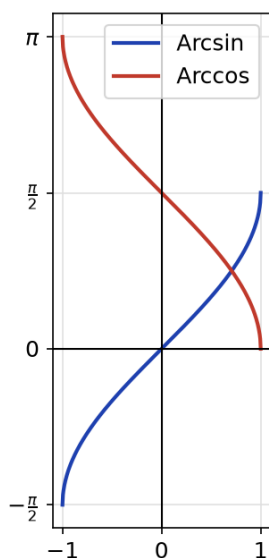
Exercice 1 : Questions de cours (3 points)

Calculatrice interdite.

- a. Rappelez de quelle bijection la fonction Arctan est la réciproque. En admettant le théorème de dérivation d'une fonction réciproque, démontrez que Arctan est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que
$$\text{Arctan}'(x) = \frac{1}{1+x^2} . (1,5 \text{ point})$$
- b. Démontrez que $\text{ch}^2 x - \text{sh}^2 x = 1$ pour tout réel x , puis que $\text{th}' = 1 - \text{th}^2 = \frac{1}{\text{ch}^2} . (1,5 \text{ point})$

Exercice 2 : Fonctions circulaires réciproques (5 points)

La figure rappelle les graphes des fonctions Arcsin , Arccos et Arctan .



- Démontrez que, pour tout réel $x > 0$, $\text{Arctan } x + \text{Arctan } \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}$. Que vaut cette somme pour $x < 0$? (1,5 point)
- On considère $f(x) = \text{Arcsin}(2x\sqrt{1-x^2})$.
 - Démontrez que f est définie sur $[-1, 1]$. (0,5 point)
 - En posant $\theta = \text{Arcsin } x$, simplifiez $f(x)$ selon que x appartient à $\left[-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$, à $\left[\frac{\sqrt{2}}{2}, 1\right]$ ou à $\left[-1, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$. (2 points)
- Démontrez que, pour tout $x \in [-1, 1]$, $\text{Arccos } x + \text{Arcsin } x = \frac{\pi}{2}$. (1 point)

Exercice 3 : Inégalités usuelles (3 points)

- a. Démontrez que, pour tout réel x , $\operatorname{ch} x \geq 1 + \frac{x^2}{2}$. (1,5 point)
- b. Démontrez que, pour tout $x > -1$, $\ln(1+x) \leq x$. Démontrez ensuite, par un argument de concavité, que $\sin x \geq \frac{2x}{\pi}$ pour tout $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. (1,5 point)

Exercice 4 : Calculs de primitives et d'intégrales (5 points)

- a. Calculez $I = \int_0^1 \frac{dx}{x^2 + x + 1}$. (1,5 point)
- b. Déterminez une primitive de $x \mapsto \frac{1}{x^2 - 3x + 2}$ sur $]2, +\infty[$. (1 point)
- c. En passant par l'exponentielle complexe, calculez $J = \int_0^\pi e^x \cos x \, dx$. (1 point)
- d. À l'aide d'une intégration par parties, calculez $K = \int_0^1 x \operatorname{Arctan} x \, dx$. (1 point)
- e. À l'aide du changement de variable $t = e^x$, calculez $L = \int_0^1 \frac{dx}{e^x + 1}$. (0,5 point)

Exercice 5 : Une intégrale fonction de ses bornes (4 points)

On note φ la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $\varphi(t) = \frac{e^{-t}}{t}$ et, pour tout $x > 0$, on pose

$$F(x) = \int_x^{2x} \frac{e^{-t}}{t} dt.$$

- a. Justifiez que F est définie et dérivable sur $]0, +\infty[$, puis démontrez que $F'(x) = \frac{e^{-2x} - e^{-x}}{x}$. (1,5 point)
- b. Déduisez-en le sens de variation de F . (0,5 point)
- c. Démontrez que, pour tout $x > 0$, $e^{-2x} \ln 2 \leq F(x) \leq e^{-x} \ln 2$. Déduisez-en les limites de F en 0 et en $+\infty$. (1,5 point)
- d. Justifiez que F se prolonge par continuité en 0 et dressez le tableau de variations de ce prolongement sur $[0, +\infty[$. (0,5 point)



Réviser avant le contrôle : fonctions usuelles, réciproques et primitives

Avant de faire ce contrôle, relisez le cours « [Fonctions usuelles](#) » en maths sup et « [Calcul de primitives](#) » en maths sup puis entraînez-vous avec les **exercices corrigés** [fonctions usuelles](#), [calcul de primitives](#).

Retrouvez tous les [contrôles de maths sup classés par chapitre](#), ou choisissez un autre niveau sur la page [contrôles de maths du CP au post-bac](#).