

Contrôle de maths sup : fonctions de deux variables et extremums

Fiche du contrôle

- **Niveau** : maths sup (MPSI)
- **Chapitre** : Fonctions de deux variables
- **Durée conseillée** : 2 heures
- **Barème** : sur 20 points (exercice 1 : 3 points ; exercice 2 : 4 points ; exercice 3 : 4 points ; exercice 4 : 4 points ; exercice 5 : 5 points)
- **Compétences évaluées** :
 - Raisonner sur la continuité en un point par majoration ou passage en polaires
 - Calculer des dérivées partielles, un gradient et un plan tangent
 - Calculer avec la règle de la chaîne lors d'un changement de variables
 - Chercher les points critiques et déterminer la nature d'un extremum
 - Communiquer une justification complète en citant les théorèmes

Exercice 1 : Questions de cours (3 points)

Calculatrice interdite.

Dans cet exercice, U est un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$.

a. Écrivez le développement limité à l'ordre 1 de f en un point $a = (a_1, a_2)$ de U , puis l'équation du plan tangent à la surface d'équation $z = f(x, y)$ au point de coordonnées $(a_1, a_2, f(a))$. (1 point)

b. Démontrez que si f admet un extremum local en un point a de U , alors a est un point

critique de f . Expliquez où intervient le fait que U est ouvert. (2 points)

Exercice 2 : Continuité en l'origine (4 points)

On définit sur $\mathbb{R}^2$ les fonctions f et g par $f(0, 0) = g(0, 0) = 0$ et, pour $(x, y) \neq (0, 0)$:

$$f(x, y) = \frac{x^2 y}{x^2 + y^2}$$

et

$$g(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}.$$

- Démontrez que f est continue en $(0, 0)$, soit par une majoration, soit en passant en coordonnées polaires. (1,5 point)
- Démontrez que g n'est pas continue en $(0, 0)$. (1 point)
- Montrez que f admet des dérivées partielles en $(0, 0)$ et calculez-les. Calculez ensuite la dérivée de f en $(0, 0)$ selon le vecteur $v = (1, 1)$, puis déduisez-en que f n'est pas de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$. (1,5 point)

Exercice 3 : Gradient, plan tangent et règle de la chaîne (4 points)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x, y) = x e^y + y^2$.

- Justifiez que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ et calculez ses dérivées partielles. (1 point)
- Déterminez une équation du plan tangent à la surface d'équation $z = f(x, y)$ au point de coordonnées $(1, 0, 1)$. (1 point)

- c. Dans quelle direction f croît-elle le plus vite à partir du point $(1, 0)$? Donnez la dérivée de f selon le vecteur unitaire correspondant. (0,5 point)
- d. On pose $\varphi(t) = f(\cos t, \sin t)$ pour $t \in \mathbb{R}$. Calculez $\varphi'(t)$ à l'aide de la règle de la chaîne, puis vérifiez le résultat en dérivant directement l'expression de φ . Donnez enfin $\varphi'(0)$. (1,5 point)

Exercice 4 : Une équation aux dérivées partielles (4 points)

On cherche les fonctions $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 telles que, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = x + y.$$

On note $(\mathcal{E})$ cette équation. On utilise le changement de variables $u = x + y$, $v = x - y$.

- a. Montrez que l'application $\Phi : (x, y) \rightarrow (x + y, x - y)$ est une bijection de $\mathbb{R}^2$ sur $\mathbb{R}^2$, de classe C^1 ainsi que sa réciproque, que vous préciserez. (1 point)
- b. Soit f de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ et $g = f \circ \Phi^{-1}$, de sorte que $f(x, y) = g(x + y, x - y)$. Exprimez $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ à l'aide des dérivées partielles de g . (1 point)
- c. Déduisez-en toutes les solutions de $(\mathcal{E})$. (1,5 point)
- d. Déterminez la solution de $(\mathcal{E})$ qui vérifie $f(x, 0) = x^2$ pour tout réel x . (0,5 point)

Exercice 5 : Points critiques et extremums (5 points)

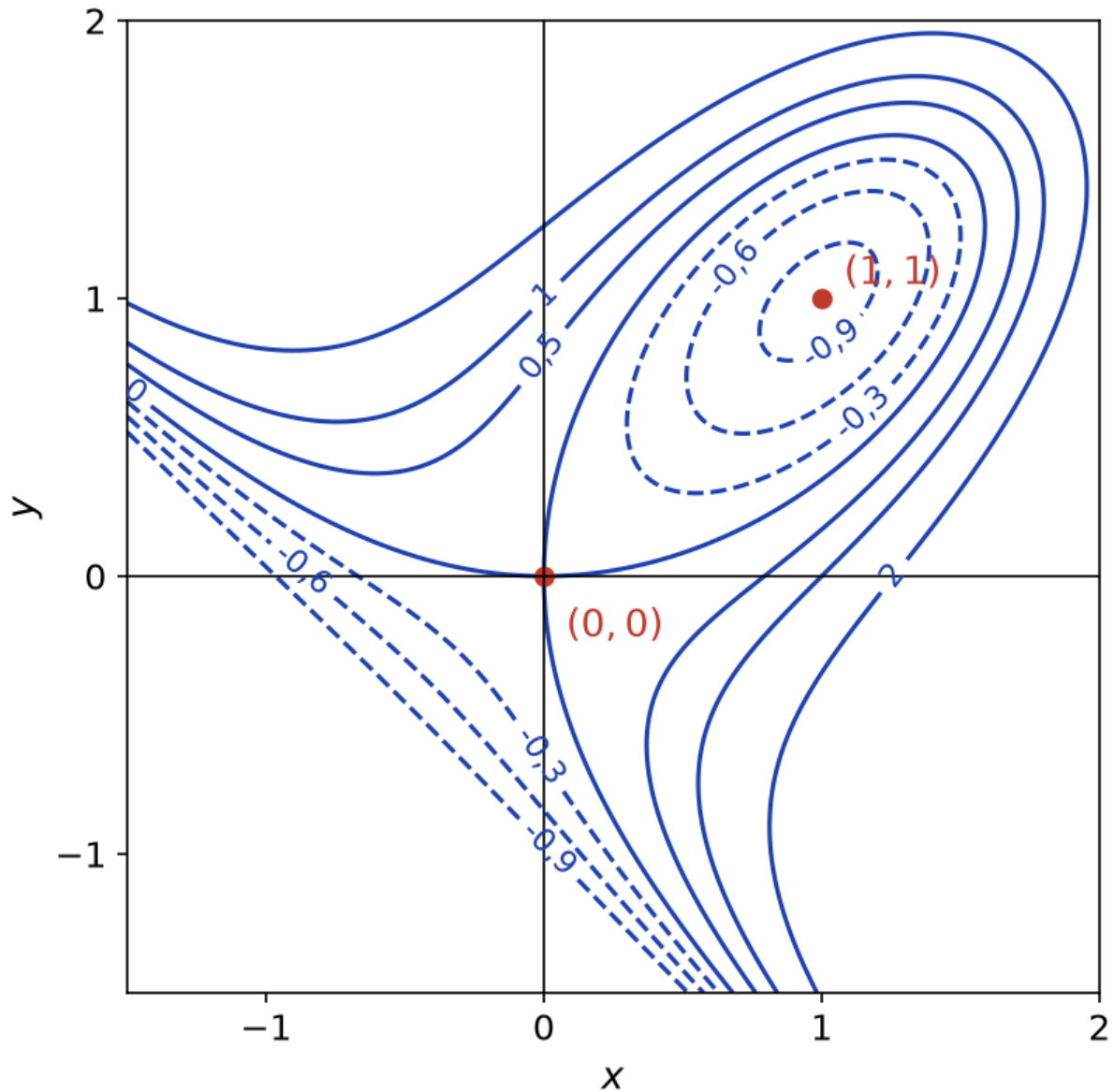
On considère les fonctions définies sur l'ouvert $\mathbb{R}^2$ par

$$f(x, y) = x^2 + xy + y^2 - 3x - 3y$$

et

$$g(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy.$$

La figure ci-dessous représente quelques lignes de niveau de g ; elle peut vous aider à conjecturer, mais pas à démontrer.



- Déterminez les points critiques de f . (1 point)
- En écrivant $f(x, y) + 3$ à l'aide de $x - 1$ et $y - 1$, montrez que f admet un minimum global, que vous préciserez. f admet-elle un maximum global ? (1 point)
- Déterminez les points critiques de g . (1 point)
- En étudiant $t \rightarrow g(t, t)$ et $t \rightarrow g(t, -t)$ au voisinage de 0, montrez que g n'admet pas

d'extremum local en $(0, 0)$. (0,5 point)

e. Montrez que, pour tous réels h et k ,

$g(1+h, 1+k) - g(1, 1) = 3(h^2 - hk + k^2) + h^3 + k^3$. Déduisez-en que g admet un minimum local en $(1, 1)$, puis que ce minimum n'est pas global. (1,5 point)



Réviser avant le contrôle : fonctions de deux variables et extremums

Avant de faire ce contrôle, relisez le cours « [Fonctions de deux variables](#) » en maths sup puis entraînez-vous avec les **exercices corrigés** [fonctions de deux variables](#).

Retrouvez tous les [contrôles de maths sup classés par chapitre](#), ou choisissez un autre niveau sur la page [contrôles de maths du CP au post-bac](#).