Contrôle de maths sup : équivalents et développements limités

Fiche du contrôle

- **Niveau :** maths sup (MPSI)
- **Chapitres :** Relations de comparaison : domination, équivalents + Développements limités et étude locale
- **Durée conseillée :** 3 heures
- **Barème :** sur 20 points (exercice 1 : 2,5 points ; exercice 2 : 3,5 points ; exercice 3 : 4 points ; exercice 4 : 2,5 points ; exercice 5 : 3,5 points ; exercice 6 : 4 points)
- **Compétences évaluées :**
  - Calculer : développements limités par produit, quotient et composition à l'ordre utile
  - Raisonner : repérer les opérations interdites sur les équivalents
  - Chercher : lever une forme indéterminée par un développement limité
  - Représenter : relier un développement asymptotique à la position d'une courbe

Exercice 1 : Questions de cours (2,5 points)

Calculatrice interdite. Les suites considérées ne s'annulent pas à partir d'un certain rang.

a. Rappelez la définition de $u_n \sim v_n$. Montrez que si $u_n \sim v_n$ et $w_n \sim t_n$, alors $u_n w_n \sim v_n t_n$ et $\frac{u_n}{w_n} \sim \frac{v_n}{t_n}$. *(1 point)*

b. Donnez un contre-exemple montrant qu'on ne peut pas ajouter des équivalents, puis un contre-exemple montrant que $u_n \sim v_n$ n'entraîne pas $e^{u_n} \sim e^{v_n}$. *(1 point)*

c. Énoncez la formule de Stirling. *(0,5 point)*

Téléchargé depuis https://mathovore.fr - Mathovore site de maths.

Exercice 2 : Équivalents de suites et de fonctions (3,5 points)

Donnez un équivalent simple de chacune des expressions suivantes.

a. $u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$ quand $n \to +\infty$. *(0,5 point)*

b. $v_n = \ln\left(1 + \sin\frac{1}{n}\right)$ quand $n \to +\infty$. *(0,5 point)*

c. $f(x) = \ln(x^2 + x) - 2\ln x$ quand $x \to +\infty$. Expliquez pourquoi on ne peut pas conclure à partir de $\ln(x^2 + x) \sim 2\ln x$. *(0,5 point)*

d. $w_n = [\dbinom?]2nn$ quand $n \to +\infty$. *(1 point)*

e. $z_n = (n!)^{1/n}$ quand $n \to +\infty$. *(1 point)*

Exercice 3 : Développements limités (4 points)

Déterminez les développements limités suivants au voisinage de 0.

a. $\frac{e^x}{1+x}$ à l'ordre 3. *(1 point)*

b. $\tan x$ à l'ordre 5. *(1 point)*

c. $\ln(\cos x)$ à l'ordre 4. *(1 point)*

d. Déduisez d'un développement limité la limite en 0 de $\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2}$. *(1 point)*

Exercice 4 : Calculs de limites (2,5 points)

a. Déterminez la limite de la suite $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2} e^{-n}$. *(1 point)*

b. Déterminez $\lim\limits_{x \to 0} (\cos x)^{1/x^2}$. *(0,5 point)*

c. Déterminez $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\tan x - x}{x - \sin x}$. *(1 point)*

Exercice 5 : Asymptote et position d'une courbe (3,5 points)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = (x+1)\, e^{1/x}$, et $\mathcal{C}$ sa courbe représentative.

a. Montrez qu'au voisinage de $+\infty$ et de $-\infty$, $f(x) = x + 2 + \frac{3}{2x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$. *(1,5 point)*

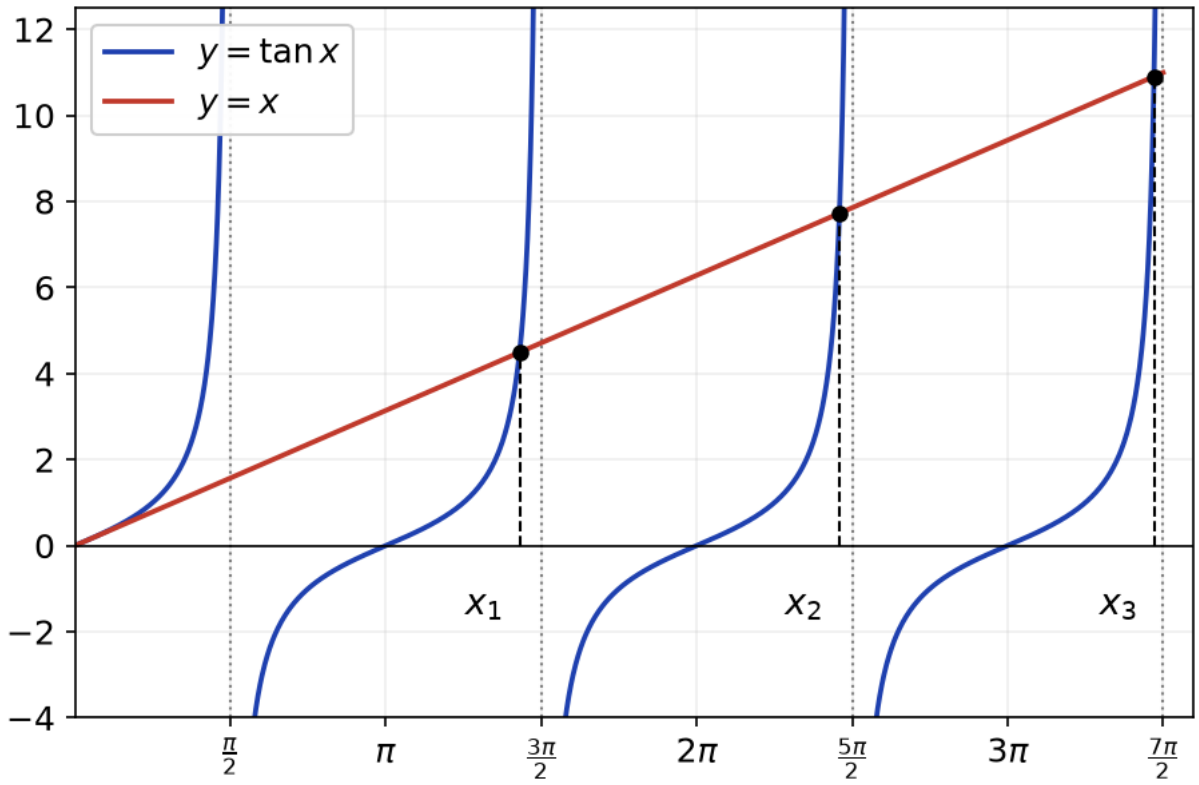
b. Déduisez-en que $\mathcal{C}$ admet une asymptote oblique Δ en $+\infty$ et en $-\infty$, et précisez la position de $\mathcal{C}$ par rapport à Δ de chaque côté. *(1 point)*

c. Soit $g(x) = \ln(1 + x + x^2)$. Déterminez le développement limité de g à l'ordre 3 en 0. Donnez l'équation de la tangente en 0 et la position locale de la courbe de g par rapport à cette tangente. *(1 point)*

Exercice 6 : Problème : les solutions de tan x = x (4 points)

Pour tout entier $n \geq 1$, on note $I_n = \left]n\pi - \frac{\pi}{2}, n\pi + \frac{\pi}{2}\right[$. La figure représente les courbes d'équations $y = \tan x$ et $y = x$.

Téléchargé depuis https://mathovore.fr - Mathovore site de maths.



a. Montrez que l'équation $\tan x = x$ admet une unique solution x_n dans I_n . *(1 point)*

b. Montrez que $x_n \in \left]n\pi, n\pi + \frac{\pi}{2}\right[$ et déduisez-en un équivalent de x_n . *(0,5 point)*

c. On pose $y_n = x_n - n\pi$. Montrez que y_n tend vers $\frac{\pi}{2}$, c'est-à-dire $x_n = n\pi + \frac{\pi}{2} + o(1)$. *(1 point)*

d. On pose $z_n = \frac{\pi}{2} - y_n$. Montrez que $\tan z_n = \frac{1}{x_n}$, puis établissez le développement asymptotique $x_n = n\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{1}{n\pi} + \frac{1}{2\pi\, n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$. *(1,5 point)*

Réviser avant le contrôle : équivalents et développements limités

Avant de faire ce contrôle, relisez le cours « Relations de comparaison » en maths sup et « Développements limités » en maths sup puis entraînez-vous avec les **exercices corrigés** relations de comparaison, développements limités.

Retrouvez tous les **contrôles de maths sup** classés par chapitre, ou choisissez un autre niveau sur la page contrôles de maths du CP au post-bac.

Téléchargé depuis https://mathovore.fr - Mathovore site de maths.