

Contrôle de maths sup : équations différentielles linéaires

Fiche du contrôle

- **Niveau** : maths sup (MPSI)
- **Chapitre** : Équations différentielles linéaires d'ordre 1 et 2
- **Durée conseillée** : 2 heures
- **Barème** : sur 20 points (exercice 1 : 3 points ; exercice 2 : 5 points ; exercice 3 : 4 points ; exercice 4 : 5 points ; exercice 5 : 3 points)
- **Compétences évaluées** :
 - Calculer : résoudre une équation d'ordre 1 par variation de la constante
 - Raisonner : recoller des solutions en un point où le coefficient s'annule
 - Chercher : trouver une solution particulière pour un second membre usuel
 - Modéliser : traduire et interpréter l'évolution d'un circuit RLC

Exercice 1 : Question de cours (3 points)

Calculatrice interdite.

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et a , b , b_1 , b_2 des fonctions continues sur I à valeurs réelles.

- Énoncez puis démontrez le théorème qui décrit l'ensemble des solutions sur I de l'équation homogène $y' + a(x)y = 0$. (2 points)
- Énoncez et démontrez le principe de superposition pour les équations $y' + a(x)y = b_1(x)$ et $y' + a(x)y = b_2(x)$. (1 point)

Exercice 2 : Variation de la constante (5 points)

On se place sur l'intervalle $I = \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ et l'on considère l'équation

$$(E) : y' + \tan(x) y = \cos^2 x.$$

- Résolvez sur I l'équation homogène associée à (E) . (1 point)
- Par la méthode de la variation de la constante, déterminez toutes les solutions de (E) sur I . (2 points)
- Déterminez la solution de (E) sur I qui vérifie $y(0) = 2$. Justifiez son unicité. (1 point)
- Déduisez-en toutes les solutions sur I de l'équation $y' + \tan(x) y = \cos^2 x + \cos x$. (1 point)

Exercice 3 : Recollement en un point singulier (4 points)

On considère l'équation

$$(F) : x y' - 2y = x^3.$$

- Résolvez (F) sur chacun des intervalles $]0, +\infty[$ et $]-\infty, 0[$. (1,5 point)
- Déterminez toutes les fonctions y dérivables sur $\mathbb{R}$ qui vérifient (F) en tout point de $\mathbb{R}$. (1,5 point)
- Combien l'équation (F) possède-t-elle de solutions sur $\mathbb{R}$ vérifiant $y(0) = 0$? Et vérifiant $y(0) = 1$? Expliquez pourquoi ce résultat ne contredit pas le théorème de Cauchy du cours. (1 point)

point)

Exercice 4 : Second ordre à coefficients constants (5 points)

On étudie les équations $y'' - 3y' + 2y = f(x)$ pour différents seconds membres f .

- Résolvez sur $\mathbb{R}$ l'équation homogène $y'' - 3y' + 2y = 0$. (1 point)
- Pour $f(x) = 2x + 1$, trouvez une solution particulière polynomiale, puis donnez toutes les solutions. (1 point)
- Pour $f(x) = e^x$, expliquez pourquoi on cherche une solution particulière de la forme $x \rightarrow \alpha x e^x$, puis déterminez α . (1,5 point)
- Pour $f(x) = 10\cos x$, trouvez une solution particulière en résolvant d'abord l'équation $y'' - 3y' + 2y = 10e^{ix}$. (1,5 point)

Exercice 5 : Décharge d'un circuit RLC (3 points)

Un condensateur chargé se décharge dans une bobine et une résistance montées en série. Dans un système d'unités adapté, la charge $q(t)$ du condensateur vérifie, pour $t \geq 0$,

$$q''(t) + 2q'(t) + 5q(t) = 0, \quad q(0) = 1, \quad q'(0) = 0.$$

- Déterminez $q(t)$. (1,5 point)
- Précisez la nature du régime obtenu et sa pseudo-période. (0,5 point)
- Démontrez que $|q(t)| \leq \frac{\sqrt{5}}{2}e^{-t}$ pour tout $t \geq 0$, et déduisez-en la limite de q en $+\infty$. (1 point)



Réviser avant le contrôle : équations différentielles linéaires

Avant de faire ce contrôle, relisez le cours [« Équations différentielles linéaires » en maths sup](#) puis entraînez-vous avec les **exercices corrigés** [équations différentielles linéaires](#).

Retrouvez tous les [contrôles de maths sup classés par chapitre](#), ou choisissez un autre niveau sur la page [contrôles de maths du CP au post-bac](#).