

Contrôle de maths sup : dimension finie et formule de Grassmann

Fiche du contrôle

- **Niveau** : maths sup (MPSI)
- **Chapitre** : Espaces vectoriels de dimension finie
- **Durée conseillée** : 2 heures
- **Barème** : sur 20 points (exercice 1 : 3 points ; exercice 2 : 4 points ; exercice 3 : 4 points ; exercice 4 : 3 points ; exercice 5 : 6 points)
- **Compétences évaluées** :
 - Raisonner : démontrer la formule de Grassmann à partir du théorème de la base incomplète
 - Calculer : déterminer une base et la dimension d'un sous-espace défini par des équations
 - Chercher : privilégier les arguments dimensionnels pour prouver qu'une famille est une base
 - Modéliser : décrire les suites récurrentes linéaires d'ordre 2 comme un espace de dimension 2

Exercice 1 : Questions de cours (3 points)

Calculatrice interdite. Dans tout le sujet, E est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension finie n . On note (e_1, e_2, e_3, e_4) la base canonique de $\mathbb{R}^4$.

- Complétez sans justifier : « dans E , toute famille libre de n vecteurs est ... ; toute famille génératrice de n vecteurs est ... ». (0,5 point)
- Soient F et G deux sous-espaces de E . Démontrez la formule de Grassmann :
$$\dim(F + G) = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G) .$$
 (2 points)

- c. Déduisez-en que $E = F \oplus G$ si et seulement si $F \cap G = \{0\}$ et $\dim F + \dim G = n$. (0,5 point)

Exercice 2 : Sous-espaces définis par des équations (4 points)

Dans $\mathbb{R}^4$, on considère

$$F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : x + y + z + t = 0 \text{ et } x - y + 2z = 0\} \text{ et } G = \text{Vect}(v_1, v_2) \text{ avec } v_1 = (-1, 1, 1, -1) \text{ et } v_2 = (1, 0, 0, 0).$$

- Déterminez une base de F et sa dimension. (1,5 point)
- Vérifiez que $\dim G = 2$, puis déterminez $F \cap G$ et sa dimension. (1 point)
- Déduisez-en $\dim(F + G)$, puis montrez que $F + G = \{(x, y, z, t) : 2y - z, z + t = 0\}$. (1 point)
- Montrez que $\text{Vect}(e_1, e_2)$ est un supplémentaire de F dans $\mathbb{R}^4$. (0,5 point)

Exercice 3 : Rang d'une famille, bases extraites et complétées (4 points)

Dans $\mathbb{R}^4$, on pose $w_1 = (1, 2, 0, 1)$, $w_2 = (2, 1, 1, 0)$, $w_3 = (0, 3, -1, 2)$ et $w_4 = (1, -1, 1, -1)$.

- Exprimez w_3 et w_4 en fonction de w_1 et w_2 . Déduisez-en le rang de la famille (w_1, w_2, w_3, w_4) . (1,5 point)
- Extrayez de cette famille une base de $W = \text{Vect}(w_1, w_2, w_3, w_4)$. (0,5 point)
- Complétez cette base en une base de $\mathbb{R}^4$ à l'aide de vecteurs de la base canonique, en justifiant. (1 point)

- d. Montrez que $(1, X - 2, (X - 2)^2)$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$, puis donnez les coordonnées de X^2 dans cette base. (1 point)

Exercice 4 : Supplémentaires dans un espace de polynômes (3 points)

Dans $\mathbb{R}_3[X]$, on considère $F = \{P \in \mathbb{R}_3[X] : P(1) = P(-1) = 0\}$ et $G = \mathbb{R}_1[X]$.

- Montrez que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_3[X]$, donnez-en une base et sa dimension. (1,5 point)
- Montrez que $\mathbb{R}_3[X] = F \oplus G$ par un argument de dimension. (1 point)
- Décomposez $X^3 + X^2$ selon cette somme directe. (0,5 point)

Exercice 5 : Problème : suites récurrentes linéaires d'ordre 2 (6 points)

On note $\mathcal{E}$ l'ensemble des suites réelles $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telles que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
 $u_{n+2} = u_{n+1} + 2u_n$.

- Montrez que $\mathcal{E}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. (0,5 point)
- Soient a et b les suites de $\mathcal{E}$ définies par $a_0 = 1$, $a_1 = 0$ et $b_0 = 0$, $b_1 = 1$.
Montrez que (a, b) est une base de $\mathcal{E}$. Que vaut $\dim \mathcal{E}$? (1,5 point)
- Déterminez les réels q non nuls tels que la suite géométrique (q^n) appartienne à $\mathcal{E}$. (1 point)
- Déduisez-en, par un argument de dimension, une deuxième base de $\mathcal{E}$ et l'expression générale d'une suite de $\mathcal{E}$. (1 point)
- Déterminez la suite $u \in \mathcal{E}$ telle que $u_0 = 0$ et $u_1 = 3$. (1 point)

- f. Soit $\mathcal{F}$ l'ensemble des suites bornées de $\mathcal{E}$ et $\mathcal{G} = \{u \in \mathcal{E} : u_0 = 0\}$. Montrez que $\mathcal{E} = \mathcal{F} \oplus \mathcal{G}$. (1 point)



Réviser avant le contrôle : dimension finie et formule de Grassmann

Avant de faire ce contrôle, relisez le cours « [Dimension finie](#) » en maths sup puis entraînez-vous avec les **exercices corrigés** [dimension finie](#).

Retrouvez tous les [contrôles de maths sup classés par chapitre](#), ou choisissez un autre niveau sur la page [contrôles de maths du CP au post-bac](#).