

Contrôle de maths sup : dérivation, accroissements finis et convexité

Fiche du contrôle

- **Niveau** : maths sup (MPSI)
- **Chapitre** : Dérivabilité et convexité
- **Durée conseillée** : 3 heures
- **Barème** : sur 20 points (exercice 1 : 3 points ; exercice 2 : 4 points ; exercice 3 : 4 points ; exercice 4 : 4 points ; exercice 5 : 5 points)
- **Compétences évaluées** :
 - Démontrer : établir le théorème de Rolle et les accroissements finis
 - Calculer : obtenir une dérivée n-ième par la formule de Leibniz
 - Raisonner : étudier la dérivabilité en un point délicat
 - Chercher : produire des inégalités par convexité

Exercice 1 : Théorème de Rolle et accroissements finis (3 points)

Calculatrice interdite. Durée conseillée : 3 heures. Les développements limités ne sont pas autorisés.

- Énoncez et démontrez le théorème de Rolle. Vous pourrez admettre le théorème des bornes atteintes et le fait que la dérivée s'annule en un extremum local atteint en un point intérieur. (1,5 point)
- Déduisez-en l'égalité des accroissements finis, à l'aide d'une fonction auxiliaire que vous préciserez. (1,5 point)

Exercice 2 : Dérivabilité en un point et limite de la dérivée (4 points)

- a. Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$. Montrez que f est dérivable en 0 et calculez $f'(0)$. Montrez ensuite que f' n'admet pas de limite en 0 . Que peut-on en conclure ? (1,5 point)
- b. Étudiez la dérivabilité en 0 de $x \rightarrow x|x|$. (0,5 point)
- c. Soit h définie sur $[0, +\infty[$ par $h(x) = x^2 \ln x$ si $x > 0$ et $h(0) = 0$. À l'aide du théorème de la limite de la dérivée, montrez que h est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, +\infty[$. La fonction h' est-elle dérivable en 0 ? (2 points)

Exercice 3 : Rolle pour les polynômes et formule de Leibniz (4 points)

- a. Soit P un polynôme réel de degré $n \geq 2$ qui admet n racines réelles distinctes. Montrez que P' admet $n - 1$ racines réelles distinctes, et qu'il n'en a pas d'autre. (1,5 point)
- b. Calculez la dérivée n -ième de $g : x \rightarrow x^2 e^{2x}$ pour $n \geq 2$. Vérifiez votre formule pour $n = 2$. (1,5 point)
- c. En appliquant la formule de Leibniz au produit $x^n \cdot x^n$, démontrez que $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$. (1 point)

Exercice 4 : Accroissements finis et suite récurrente (4 points)

On considère la suite définie par $u_0 \in [0, 1]$ et $u_{n+1} = \cos(u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

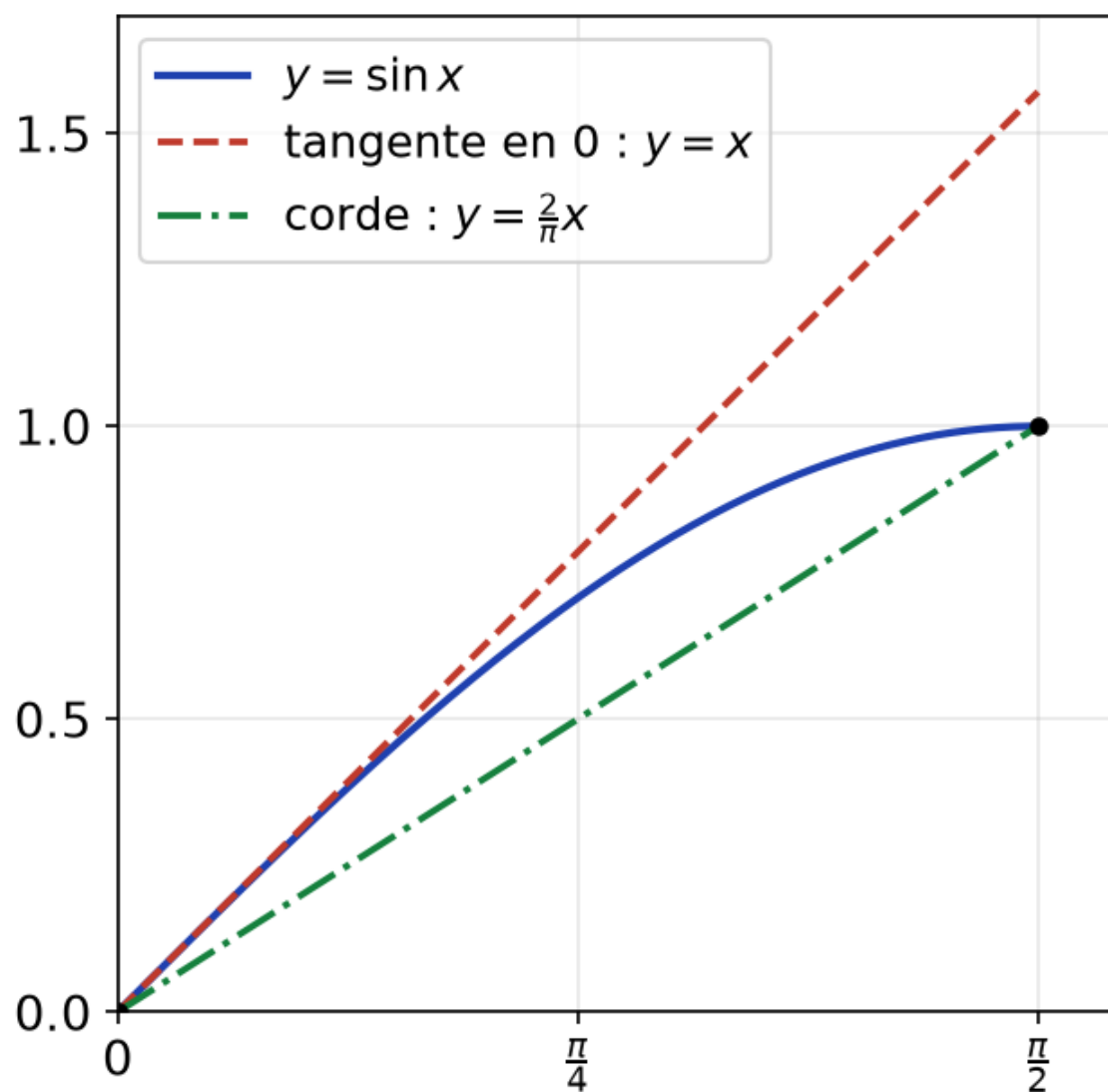
- a. Montrez que $[0, 1]$ est stable par la fonction cosinus, et que l'équation $\cos x = x$ admet une unique solution α dans $[0, 1]$. (1 point)

- b. À l'aide de l'inégalité des accroissements finis, montrez que $|\cos x - \cos y| \leq \sin(1) |x - y|$ pour tous $x, y \in [0, 1]$. (1 point)
- c. Dédisez-en que $|u_n - \alpha| \leq (\sin 1)^n$ pour tout n , puis que (u_n) converge vers α . (1 point)
- d. On admet que $\sin 1 \leq 0,85$. On donne $\ln 10 \approx 2,303$ et $\ln(0,85) \approx -0,163$. Déterminez un rang à partir duquel u_n approche α à 10^{-2} près. (1 point)

Exercice 5 : Problème - convexité et inégalités (5 points)

Soit I un intervalle et $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe.

- Démontrez par récurrence l'inégalité de Jensen : pour $n \geq 2$, $x_1, \dots, x_n \in I$ et des réels $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ positifs de somme 1, on a $f\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^n \lambda_i f(x_i)$. (1,5 point)
- Montrez que $-\ln$ est convexe sur $]0, +\infty[$. Dédisez-en l'inégalité arithmético-géométrique : pour des réels $x_1, \dots, x_n$ strictement positifs, $(x_1 x_2 \dots x_n)^{1/n} \leq \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$. (1,5 point)
- La figure représente la fonction sinus sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, sa tangente en 0 et la corde qui joint les points d'abscisses 0 et $\frac{\pi}{2}$. En justifiant la concavité du sinus sur cet intervalle, démontrez que $\frac{2}{\pi}x \leq \sin x \leq x$ pour tout $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. (1 point)



4. Soient a, b, c des réels strictement positifs tels que $a + b + c = 3$. Montrez que $abc \leq 1$, puis, par convexité de $x \rightarrow \frac{1}{x}$, que $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq 3$. (1 point)



Réviser avant le contrôle : dérivation, accroissements finis et

convexité

Avant de faire ce contrôle, relisez le cours « [Dérivabilité et convexité](#) » en maths sup puis entraînez-vous avec les **exercices corrigés** [dérivabilité et convexité](#).

Retrouvez tous les [contrôles de maths sup classés par chapitre](#), ou choisissez un autre niveau sur la page [contrôles de maths du CP au post-bac](#).