

Contrôle de maths sup : dénombrement et formules combinatoires

Fiche du contrôle

- **Niveau** : maths sup (MPSI)
- **Chapitre** : Dénombrement
- **Durée conseillée** : 2 heures
- **Barème** : sur 20 points (exercice 1 : 4 points ; exercice 2 : 4 points ; exercice 3 : 4 points ; exercice 4 : 3 points ; exercice 5 : 5 points)
- **Compétences évaluées** :
 - Modéliser une situation par des listes, des arrangements ou des parties
 - Raisonner par bijection ou par découpage en ensembles disjoints
 - Calculer un cardinal par les principes additif et multiplicatif
 - Démontrer une identité sur les coefficients binomiaux par double dénombrement
 - Communiquer une justification complète et rigoureuse

Exercice 1 : Applications, injections et parties (4 points)

Calculatrice interdite.

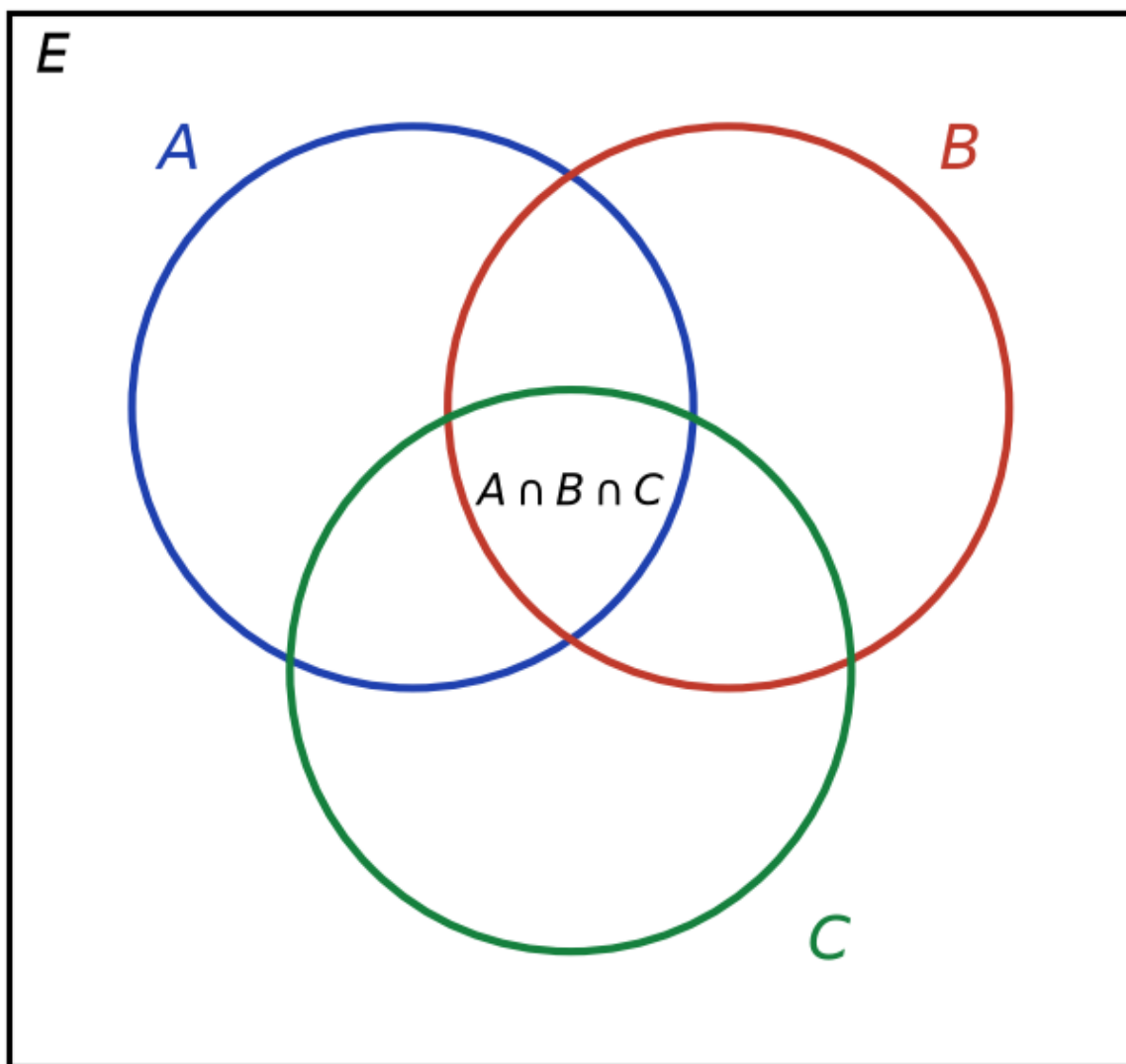
Dans tout l'exercice, E et F sont deux ensembles finis, avec $\text{card } E = p$ et $\text{card } F = n$, où n et p sont des entiers naturels. Chaque résultat doit être justifié par une construction explicite (découpage ou bijection), et non par la seule citation d'une formule.

- a. Démontrez que l'ensemble F^E des applications de E dans F a pour cardinal n^p . (1,5 point)

- b. On suppose $p \leq n$. Démontrez que le nombre d'injections de E dans F est égal à $\frac{n!}{(n-p)!}$. (1,5 point)
- c. À l'aide de la fonction indicatrice d'une partie, construisez une bijection de $\mathcal{P}(E)$ sur $\{0, 1\}^E$.
Déduisez-en le cardinal de $\mathcal{P}(E)$. (1 point)

Exercice 2 : Cardinal d'une réunion (4 points)

Soit A , B et C trois parties d'un ensemble fini E .



- En écrivant $A \cup B$ comme la réunion disjointe de A et de $B \setminus A$, démontrez que $\text{card}(A \cup B) = \text{card } A + \text{card } B - \text{card}(A \cap B)$. (1 point)
- En appliquant ce résultat à $A \cup B$ et C , établissez une formule donnant $\text{card}(A \cup B \cup C)$ en fonction des cardinaux de A , B , C et de leurs intersections. (1,5 point)
- Pour $d \in \mathbb{N}^*$, on note A_d l'ensemble des entiers de $[[1, 1000]]$ divisibles par d . Déterminez le nombre d'entiers de $[[1, 1000]]$ divisibles par 2, par 3 ou par 5, puis le nombre de ceux qui ne sont divisibles par aucun de ces trois nombres. (1,5 point)

Exercice 3 : Anagrammes et tirages (4 points)

On appelle anagramme d'un mot toute suite de lettres obtenue en permutant ses lettres, qu'elle ait un sens ou non.

- Combien le mot CONCOURS possède-t-il d'anagrammes ? Justifiez par un choix successif des positions de chaque lettre. (1,5 point)
- Combien de ces anagrammes contiennent les deux lettres C côte à côte ? (1 point)
- Une urne contient 10 boules numérotées de 1 à 10. On tire 3 boules. Dénombrez les résultats possibles lorsque le tirage est successif avec remise, successif sans remise, puis simultané, en précisant à chaque fois l'objet mathématique qui modélise un résultat. (1 point)
- Parmi les tirages simultanés de 3 boules, combien ont pour plus grand numéro 7 ? (0,5 point)

Exercice 4 : Formules de Pascal et de Vandermonde (3 points)

On rappelle que, pour tout ensemble E à n éléments et tout entier p , le nombre $\binom{n}{p}$ est le nombre de parties de E à p éléments. Les démonstrations demandées sont combinatoires : n'utilisez

pas l'expression de $\binom{n}{p}$ à l'aide de factorielles.

- a. Soit E un ensemble à $n + 1$ éléments et a un élément fixé de E . En séparant les parties à $p + 1$ éléments de E selon qu'elles contiennent a ou non, démontrez que

$$\binom{n+1}{p+1} = \binom{n}{p} + \binom{n}{p+1}.$$
 (1,5 point)

- b. Soit n , m et p des entiers naturels. Démontrez la formule de Vandermonde :

$$\sum_{k=0}^p \binom{n}{k} \binom{m}{p-k} = \binom{n+m}{p}.$$

(1 point)

- c. Déduisez-en la valeur de $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2$. (0,5 point)

Exercice 5 : Surjections d'un ensemble à $n + 1$ éléments (5 points)

Soit $n \geq 1$ un entier. On note $E = [1, n+1]$ et $F = [1, n]$, et l'on cherche le nombre s_n de surjections de E sur F .

- a. Soit f une surjection de E sur F . Démontrez qu'il existe un unique élément y de F qui possède exactement deux antécédents par f , et que tout autre élément de F possède exactement un antécédent. (1,5 point)
- b. Construisez une bijection entre l'ensemble des surjections de E sur F et l'ensemble des couples $(\{i, j\}, \sigma)$, où $\{i, j\}$ est une paire d'éléments de E et σ une bijection d'un ensemble à n éléments, que vous préciserez, sur F . Déduisez-en que $s_n = \frac{n(n+1)!}{2}$. (2 points)
- c. Vérifiez ce résultat pour $n = 2$ en dénombrant directement les applications de $[1, 3]$ dans $[1, 2]$ qui ne sont pas surjectives. (0,5 point)
- d. Cinq étudiants sont répartis dans quatre salles de travaux pratiques, aucune salle ne devant rester vide. Combien existe-t-il de répartitions possibles ? Retrouvez ce nombre par un second

raisonnement. (1 point)



Réviser avant le contrôle : dénombrement et formules combinatoires

Avant de faire ce contrôle, relisez le cours [« Dénombrement » en maths sup](#) puis entraînez-vous avec les **exercices corrigés** [dénombrement](#).

Retrouvez tous les [contrôles de maths sup classés par chapitre](#), ou choisissez un autre niveau sur la page [contrôles de maths du CP au post-bac](#).