Contrôle de maths sup : complexes, racines n-ièmes et géométrie

Fiche du contrôle

- **Niveau :** maths sup (MPSI)
- **Chapitre :** Nombres complexes et exponentielle complexe
- **Durée conseillée :** 2 heures
- **Barème :** sur 20 points (exercice 1 : 3 points ; exercice 2 : 5 points ; exercice 3 : 5 points ; exercice 4 : 7 points)
- **Compétences évaluées :**
  - Calculer : forme trigonométrique, linéarisation et somme de cosinus
  - Chercher : racines carrées sous forme algébrique et équations du second degré
  - Représenter : racines n-ièmes et points dans le plan complexe
  - Raisonner : traduire alignement, orthogonalité et similitudes en complexes

Exercice 1 : Racines n-ièmes de l'unité (3 points)

Calculatrice interdite.

Soit n un entier naturel non nul. On note $\mathbb{U}_n = \{z \in \mathbb{C} : z^n = 1,1\}$.

a. Démontrez que $\mathbb{U}_n = \left\{e^{\frac{2ik\pi}{n}} : k \in [\![0, n-1]\!]\right\}$ et que $\mathbb{U}_n$ possède exactement n éléments. *(2 points)*

b. On suppose $n \geq 2$. Démontrez que la somme des éléments de $\mathbb{U}_n$ est nulle. *(1 point)*

Téléchargé depuis https://mathovore.fr - Mathovore site de maths.

Exercice 2 : Angle moitié et linéarisation (5 points)

a. Soit $\theta \in]-\pi, \pi[$. Écrivez $1 + e^{i\theta}$ sous forme trigonométrique en précisant son module et un argument. Pour $\theta \in]0, 2\pi[$, faites de même pour $1 - e^{i\theta}$. *(1,5 point)*

b. Linéarisez $\cos^4 t$ à l'aide des formules d'Euler. *(1 point)*

c. Soit $t \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}$. En utilisant la question a, calculez $\sum_{k=0}^{n} e^{ikt}$, puis déduisez-en une expression factorisée de $\sum_{k=0}^{n} \cos(kt)$. *(1,5 point)*

d. À l'aide de la formule de Moivre, exprimez $\cos(3t)$ en fonction de $\cos t$. *(1 point)*

Exercice 3 : Équations dans C (5 points)

a. Déterminez sous forme algébrique les racines carrées de $3 - 4i$. *(1,5 point)*

b. Résolvez dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 - 3iz - 3 + i = 0$. *(1,5 point)*

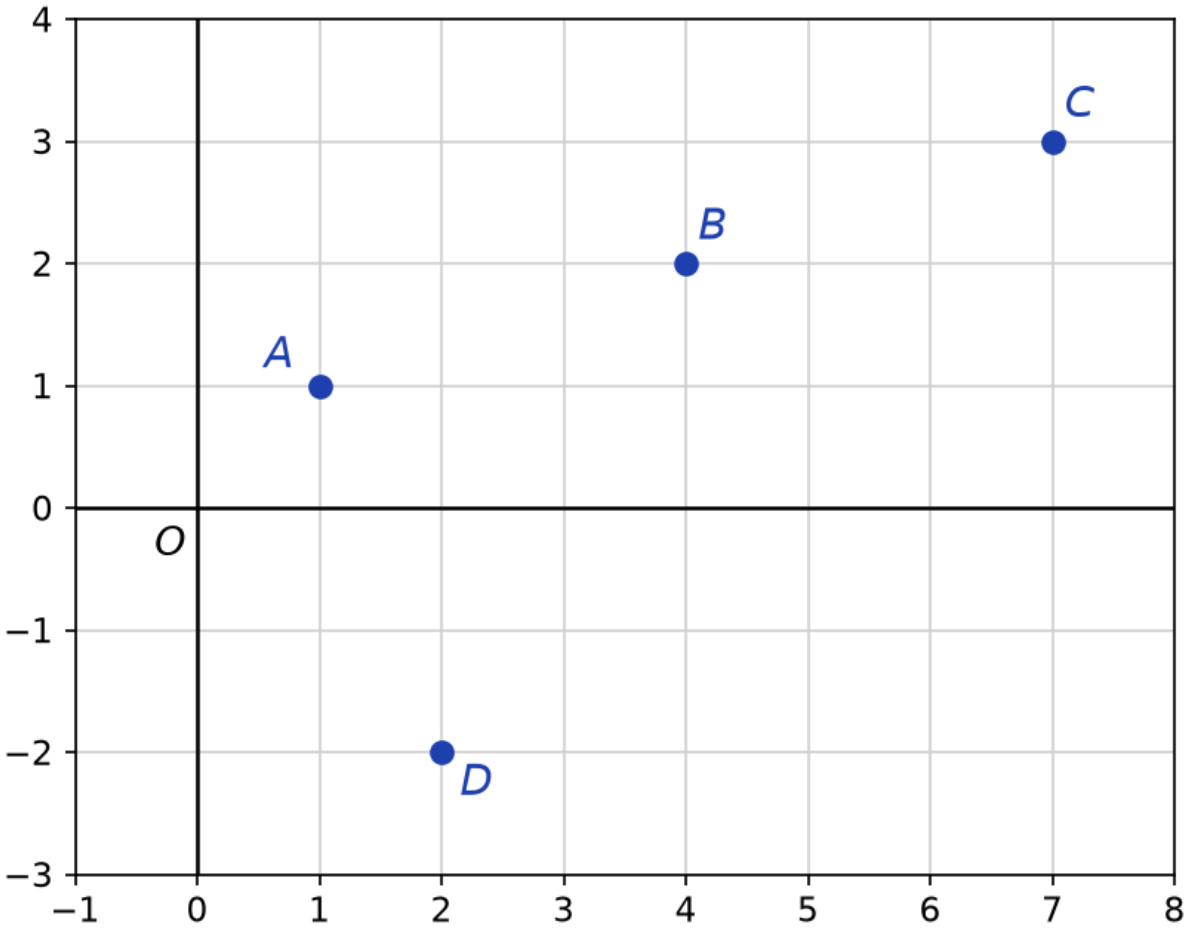
c. Résolvez dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^3 = 8i$; donnez les solutions sous forme exponentielle puis algébrique. *(1 point)*

d. Résolvez dans $\mathbb{C}$ l'équation $e^z = 1 + i\sqrt{3}$. *(1 point)*

Exercice 4 : Géométrie dans le plan complexe (7 points)

Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct. On considère les points A , B , C et D d'affixes respectives

$$a = 1 + i,\ b = 4 + 2i,\ c = 7 + 3i,\ d = 2 - 2i.$$



a. Calculez $\frac{c-a}{b-a}$ et déduisez-en que les points A, B et C sont alignés. *(1 point)*

b. Calculez $\frac{d-a}{b-a}$. Déduisez-en la nature du triangle ABD. *(1,5 point)*

c. On considère l'application s du plan dans lui-même qui, au point d'affixe z, associe le point d'affixe $(1+i)z + 1$. Démontrez que s possède un unique point fixe Ω, dont vous donnerez l'affixe, puis précisez la nature de s et ses éléments caractéristiques. *(1,5 point)*

d. Déterminez l'écriture complexe de la rotation r de centre A qui envoie B sur D. *(1 point)*

e. Déterminez l'ensemble Γ des points M d'affixe $z \neq b$ tels que $\frac{z-a}{z-b}$ soit imaginaire pur. Précisez le centre et le rayon de la figure obtenue. *(2 points)*

Téléchargé depuis https://mathovore.fr - Mathovore site de maths.

Réviser avant le contrôle : complexes, racines n-ièmes et géométrie

Avant de faire ce contrôle, relisez le cours « Nombres complexes » en maths sup puis entraînez-vous avec les **exercices corrigés** nombres complexes.

Retrouvez tous les **contrôles de maths sup** classés par chapitre, ou choisissez un autre niveau sur la page contrôles de maths du CP au post-bac.