Contrôle de maths sup : calcul matriciel, puissances et inverse

Fiche du contrôle

- **Niveau :** maths sup (MPSI)
- **Chapitre :** Calcul matriciel et systèmes linéaires
- **Durée conseillée :** 2 heures
- **Barème :** sur 20 points (exercice 1 : 3 points ; exercice 2 : 3,5 points ; exercice 3 : 4 points ; exercice 4 : 3 points ; exercice 5 : 3 points ; exercice 6 : 3,5 points)
- **Compétences évaluées :**
  - Calculer : produits de matrices, puissances n-ièmes et inverses par opérations élémentaires
  - Raisonner : justifier l'emploi de la formule du binôme par la commutation
  - Modéliser : traduire un système linéaire paramétré et discuter selon le paramètre
  - Communiquer : rédiger une démonstration de cours sur les matrices triangulaires

Exercice 1 : Questions de cours (3 points)

Calculatrice interdite. Dans tout le sujet, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et I_n la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

a. Énoncez la formule du binôme pour deux matrices A et B de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, avec son hypothèse. Montrez sur les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ que cette hypothèse ne peut pas être supprimée. *(1,5 point)*

b. Démontrez que le produit de deux matrices triangulaires supérieures de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est triangulaire supérieure, et précisez ses coefficients diagonaux. *(1,5 point)*

Téléchargé depuis https://mathovore.fr - Mathovore site de maths.

Exercice 2 : Produits, transposées et symétries (3,5 points)

On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ , & \\ 0 & , \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & , \\ 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$.

a. Calculez AB et BA. *(1 point)*

b. Soit $M \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$. Montrez que $M^T M$ est symétrique, puis que $M^T M = 0$ entraîne $M = 0$. *(1 point)*

c. Écrivez $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 4 & & \\ , & -1 & \\ 2 & 5 & 0_0 \end{pmatrix}$ comme somme d'une matrice symétrique S et d'une matrice antisymétrique K. *(1 point)*

d. Montrez que le carré d'une matrice antisymétrique est symétrique. *(0,5 point)*

Exercice 3 : Puissances par la formule du binôme (4 points)

Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. On pose $N = A - 2I_3$.

a. Calculez N^2 et N^3. *(0,5 point)*

b. Justifiez l'emploi de la formule du binôme, puis calculez A^n pour tout entier $n \geq 0$ sous forme d'une matrice explicite. *(2 points)*

c. Montrez que A est inversible en calculant le produit $A\left(\frac{1}{2}I_3 - \frac{1}{4}N + \frac{1}{8}N^2\right)$. Vérifiez que la formule obtenue en b) reste vraie pour $n = -1$. *(1 point)*

d. Soit $D = \begin{pmatrix} [\texttt{aay?}] & 1 \,\&\, 1 \\ -1 \,\&\, 3 \end{pmatrix}$. Calculez $(D - 2I_2)^2$, puis donnez D^n pour tout $n \in \mathbb{N}$

. *(0,5 point)*

Exercice 4 : Inverse par la méthode de Gauss-Jordan (3 points)

Soit $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 3 & 3 \end{pmatrix}$.

a. Par la méthode de Gauss-Jordan, montrez que P est inversible et calculez P^{-1}. Vous écrirez chaque opération sur les lignes. *(2 points)*

b. Déduisez-en la solution du système $\begin{cases} x + 2y + z = 1 \\ 2x + 5y + 3z = 0 \\ x + 3y + 3z = 2 \end{cases}$ *(1 point)*

Exercice 5 : Système linéaire à paramètre (3 points)

Soit m un réel. On considère le système (S_m) d'inconnues réelles x, y, z :

$$\begin{cases} x + y + mz = 1 \\ x + my + z = m \\ mx + y + z = m^2 \end{cases}$$

a. Par la méthode du pivot, ramenez (S_m) à un système triangulaire équivalent. *(1 point)*

b. Pour $m \notin \{1, -2\}$, montrez que (S_m) admet une unique solution et calculez-la. *(1 point)*

c. Résolvez (S_1) et (S_{-2}). *(1 point)*

Téléchargé depuis https://mathovore.fr - Mathovore site de maths.

Exercice 6 : Problème : commutant d'une matrice nilpotente (3,5 points)

Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on appelle commutant de A l'ensemble $\mathcal{C}(A) = \{ M \in \mathcal{M}_n(athbbK) : AMAM = MA \}$. On note $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

a. Montrez que $\mathcal{C}(A)$ contient I_n et A, et qu'il est stable par somme, par multiplication par un scalaire et par produit. *(0,5 point)*

b. Soit $M = (m_{ij}) \in \mathcal{M}_3(\mathbb{K})$. Calculez JM et MJ, puis montrez que $M \in \mathcal{C}(J)$ si et seulement s'il existe $a, b, c \in \mathbb{K}$ tels que $M = aI_3 + bJ + cJ^2$. *(1,5 point)*

c. Déduisez-en le commutant de la matrice A de l'exercice 3. *(0,5 point)*

d. Montrez qu'il n'existe aucune matrice $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{K})$ telle que $M^2 = J$. *(1 point)*

Réviser avant le contrôle : calcul matriciel, puissances et inverse

Avant de faire ce contrôle, relisez le cours « Calcul matriciel » en maths sup puis entraînez-vous avec les **exercices corrigés** calcul matriciel.

Retrouvez tous les **contrôles de maths sup** classés par chapitre, ou choisissez un autre niveau sur la page contrôles de maths du CP au post-bac.