

Contrôle de maths sup : calcul matriciel, puissances et inverse

Fiche du contrôle

- **Niveau** : maths sup (MPSI)
- **Chapitre** : Calcul matriciel et systèmes linéaires
- **Durée conseillée** : 2 heures
- **Barème** : sur 20 points (exercice 1 : 3 points ; exercice 2 : 3,5 points ; exercice 3 : 4 points ; exercice 4 : 3 points ; exercice 5 : 3 points ; exercice 6 : 3,5 points)
- **Compétences évaluées** :
 - Calculer : produits de matrices, puissances n-ièmes et inverses par opérations élémentaires
 - Raisonner : justifier l'emploi de la formule du binôme par la commutation
 - Modéliser : traduire un système linéaire paramétré et discuter selon le paramètre
 - Communiquer : rédiger une démonstration de cours sur les matrices triangulaires

Exercice 1 : Questions de cours (3 points)

Calculatrice interdite. Dans tout le sujet, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et I_n la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

- a. Énoncez la formule du binôme pour deux matrices A et B de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, avec son hypothèse. Montrez sur les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ que cette hypothèse ne peut pas être supprimée. (1,5 point)
- b. Démontrez que le produit de deux matrices triangulaires supérieures de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est triangulaire supérieure, et précisez ses coefficients diagonaux. (1,5 point)

Exercice 2 : Produits, transposées et symétries (3,5 points)

On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$.

- Calculez AB et BA . (1 point)
- Soit $M \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$. Montrez que $M^T M$ est symétrique, puis que $M^T M = 0$ entraîne $M = 0$. (1 point)
- Écrivez $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 4 & -1 & 0 \\ 2 & 5 & 0 \end{pmatrix}$ comme somme d'une matrice symétrique S et d'une matrice antisymétrique K . (1 point)
- Montrez que le carré d'une matrice antisymétrique est symétrique. (0,5 point)

Exercice 3 : Puissances par la formule du binôme (4 points)

Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. On pose $N = A - 2I_3$.

- Calculez N^2 et N^3 . (0,5 point)
- Justifiez l'emploi de la formule du binôme, puis calculez A^n pour tout entier $n \geq 0$ sous forme d'une matrice explicite. (2 points)
- Montrez que A est inversible en calculant le produit $A \left(\frac{1}{2} I_3 - \frac{1}{4} N + \frac{1}{8} N^2 \right)$. Vérifiez que la formule obtenue en b) reste vraie pour $n = -1$. (1 point)
- Soit $D = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$. Calculez $(D - 2I_2)^2$, puis donnez D^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

. (0,5 point)

Exercice 4 : Inverse par la méthode de Gauss-Jordan (3 points)

Soit $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 3 & 3 \end{pmatrix}$.

a. Par la méthode de Gauss-Jordan, montrez que P est inversible et calculez P^{-1} . Vous écrirez chaque opération sur les lignes. (2 points)

b. Déduisez-en la solution du système $\begin{cases} x + 2y + z = 1 \\ 2x + 5y + 3z = 0 \\ x + 3y + 3z = 2 \end{cases}$ (1 point)

Exercice 5 : Système linéaire à paramètre (3 points)

Soit m un réel. On considère le système (S_m) d'inconnues réelles x, y, z :

$$\begin{cases} x + y + mz = 1 \\ x + my + z = m \\ mx + y + z = m^2 \end{cases}$$

a. Par la méthode du pivot, ramenez (S_m) à un système triangulaire équivalent. (1 point)

b. Pour $m \notin \{1, -2\}$, montrez que (S_m) admet une unique solution et calculez-la. (1 point)

c. Résolvez (S_1) et (S_{-2}) . (1 point)

Exercice 6 : Problème : commutant d'une matrice nilpotente (3,5 points)

Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on appelle commutant de A l'ensemble

$$\mathcal{C}(A) = \{ M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) : AM = MA \}. \text{ On note } J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

- Montrez que $\mathcal{C}(A)$ contient I_n et A , et qu'il est stable par somme, par multiplication par un scalaire et par produit. (0,5 point)
- Soit $M = (m_{ij}) \in \mathcal{M}_3(\mathbb{K})$. Calculez JM et MJ , puis montrez que $M \in \mathcal{C}(J)$ si et seulement s'il existe $a, b, c \in \mathbb{K}$ tels que $M = aI_3 + bJ + cJ^2$. (1,5 point)
- Déduisez-en le commutant de la matrice A de l'exercice 3. (0,5 point)
- Montrez qu'il n'existe aucune matrice $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{K})$ telle que $M^2 = J$. (1 point)



Réviser avant le contrôle : calcul matriciel, puissances et inverse

Avant de faire ce contrôle, relisez le cours « [Calcul matriciel](#) » en maths sup puis entraînez-vous avec les **exercices corrigés** [calcul matriciel](#).

Retrouvez tous les [contrôles de maths sup classés par chapitre](#), ou choisissez un autre niveau sur la page [contrôles de maths du CP au post-bac](#).