

Contrôle de maths sup : borne supérieure et convergence des suites

Fiche du contrôle

- **Niveau** : maths sup (MPSI)
- **Chapitre** : Nombres réels et suites numériques
- **Durée conseillée** : 3 heures
- **Barème** : sur 20 points (exercice 1 : 4 points ; exercice 2 : 3 points ; exercice 3 : 3,5 points ; exercice 4 : 4 points ; exercice 5 : 5,5 points)
- **Compétences évaluées** :
 - Raisonner : rédiger une preuve complète avec quantificateurs
 - Calculer : déterminer des bornes supérieures et inférieures
 - Démontrer : établir une convergence par la définition avec epsilon
 - Chercher : utiliser suites extraites et suites adjacentes

Exercice 1 : Borne supérieure et densité de $\mathbb{Q}$ (4 points)

Calculatrice interdite. Durée conseillée de l'épreuve : 3 heures. La qualité de la rédaction et la précision des quantificateurs entrent pour une part importante dans la notation.

- a. Énoncez la propriété de la borne supérieure dans $\mathbb{R}$. (1 point)
- b. Soit A une partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$, et M un majorant de A . Démontrez que
$$M = \sup A \text{ si et seulement si : } \forall \varepsilon > 0, \exists a \in A, a > M - \varepsilon. \quad (1,5 \text{ point})$$
- c. Démontrez que $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$: pour tous réels $x < y$, il existe un rationnel r tel que

$x < r < y$. Vous pourrez utiliser la partie entière et la propriété d'Archimède. (1,5 point)

Exercice 2 : Calculs de bornes supérieures et inférieures (3 points)

Pour chaque partie, déterminez la borne supérieure et la borne inférieure, puis dites si ce sont un plus grand ou un plus petit élément.

a. $A = \left\{ \frac{n}{n+1} : n \in \mathbb{N} \right\}$. (1 point)

b. $B = \left\{ \frac{1}{p} + \frac{1}{q} : (p, q) \in (\mathbb{N}^*)^2 \right\}$. (1 point)

c. Soient A et B deux parties non vides et majorées de $\mathbb{R}$. On pose $A + B = \left\{ a + b : a \in A, b \in B \right\}$. Montrez que $A + B$ admet une borne supérieure et que $\sup(A + B) = \sup A + \sup B$. (1 point)

Exercice 3 : Limites rédigées avec epsilon (3,5 points)

a. On pose $u_n = \frac{2n+1}{n+3}$ pour $n \in \mathbb{N}$. Démontrez, en revenant à la définition avec ε , que (u_n) converge vers 2. Donnez un rang N explicite en fonction de ε . (1,5 point)

b. Soit (u_n) une suite qui converge vers un réel $\ell > 0$. Démontrez qu'il existe un rang N tel que $u_n > \frac{\ell}{2}$ pour tout $n \geq N$. (0,5 point)

c. On pose $v_n = \cos\left(\frac{n\pi}{3}\right)$. À l'aide de deux suites extraites bien choisies, montrez que la suite (v_n) diverge. (1,5 point)

Exercice 4 : Suites adjacentes et irrationalité de e (4 points)

Pour $n \geq 1$, on pose :

$$u_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \text{ et } v_n = u_n + \frac{1}{n \cdot n!}.$$

- Montrez que la suite (u_n) est strictement croissante. (0,5 point)
- Montrez que la suite (v_n) est strictement décroissante. (1,5 point)
- Déduisez-en que les suites (u_n) et (v_n) convergent vers une même limite ℓ . On admet que $\ell = e$. (0,5 point)
- On suppose par l'absurde que $e = \frac{p}{q}$ avec $p \in \mathbb{N}^*$ et $q \in \mathbb{N}^*$. En encadrant e par u_q et v_q , puis en multipliant par $q \cdot q!$, obtenez une contradiction. Concluez. (1,5 point)

Exercice 5 : Problème - Bolzano-Weierstrass et lemme de Cesàro (5,5 points)

Partie A : valeurs d'adhérence. On appelle valeur d'adhérence d'une suite (u_n) toute limite d'une suite extraite de (u_n) .

- Énoncez le théorème de Bolzano-Weierstrass. (0,5 point)
- Soit (u_n) une suite bornée qui admet une unique valeur d'adhérence ℓ . Démontrez par l'absurde que (u_n) converge vers ℓ . (1,5 point)

Partie B : moyennes de Cesàro. Pour une suite réelle $(u_n)_{n \geq 1}$, on pose, pour tout $n \geq 1$:

$$c_n = \frac{u_1 + u_2 + \dots + u_n}{n}.$$

3. On suppose que (u_n) converge vers 0. Démontrez, en rédigeant avec ε , que (c_n) converge vers 0. (1,5 point)
4. Déduisez-en que si (u_n) converge vers un réel ℓ , alors (c_n) converge vers ℓ . Montrez ensuite, par un exemple, que la réciproque est fausse. (1 point)
5. Soit (u_n) une suite telle que $u_{n+1} - u_n$ tend vers un réel a . Démontrez que $\frac{u_n}{n}$ tend vers a . (1 point)



Réviser avant le contrôle : borne supérieure et convergence des suites

Avant de faire ce contrôle, relisez le cours « [Nombres réels et suites](#) » en maths sup puis entraînez-vous avec les **exercices corrigés** [nombres réels et suites](#).

Retrouvez tous les [contrôles de maths sup classés par chapitre](#), ou choisissez un autre niveau sur la page [contrôles de maths du CP au post-bac](#).