

Contrôle de maths sup : applications linéaires et théorème du rang

Fiche du contrôle

- **Niveau** : maths sup (MPSI)
- **Chapitre** : Applications linéaires et théorème du rang
- **Durée conseillée** : 3 heures
- **Barème** : sur 20 points (exercice 1 : 4 points ; exercice 2 : 3,5 points ; exercice 3 : 5 points ; exercice 4 : 3 points ; exercice 5 : 4,5 points)
- **Compétences évaluées** :
 - Raisonner : démontrer la caractérisation des projecteurs par $p^2 = p$
 - Calculer : déterminer noyau et image d'une application linéaire
 - Chercher : exploiter le théorème du rang et les arguments de dimension
 - Communiquer : rédiger une preuve par double inclusion ou par dimension

Exercice 1 : Question de cours sur les projecteurs (4 points)

Calculatrice interdite.

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). On note id l'identité de E .

- Soient F et G deux sous-espaces supplémentaires de E . Définissez le projecteur p sur F parallèlement à G , puis montrez que p est linéaire et que $p \circ p = p$. (1 point)
- Réciproquement, soit $p \in \mathcal{L}(E)$ tel que $p \circ p = p$. Montrez que $\text{Im } p = \text{Ker}(p - \text{id})$. (1 point)

- c. Montrez que $E = \text{Ker } p \oplus \text{Im } p$. (1,5 point)
- d. Concluez que p est le projecteur sur $\text{Im } p$ parallèlement à $\text{Ker } p$. (0,5 point)

Exercice 2 : Noyau et image d'un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ (3,5 points)

On considère l'application $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ définie par $f(x, y, z) = (x - y, y - z, z - x)$.

- a. Montrez que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$. (0,5 point)
- b. Déterminez $\text{Ker } f$ et donnez-en une base. (1 point)
- c. Déduisez-en le rang de f , puis montrez que $\text{Im } f = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \mid a + b + c = 0\}$. (1 point)
- d. Les sous-espaces $\text{Ker } f$ et $\text{Im } f$ sont-ils supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$? (0,5 point)
- e. Montrez qu'il n'existe aucun endomorphisme g de $\mathbb{R}^3$ tel que $\text{Ker } g = \text{Im } g$. (0,5 point)

Exercice 3 : Opérateur de différence sur les polynômes (5 points)

Soit $n \geq 3$ un entier. Pour $P \in \mathbb{R}_n[X]$, on pose $\Delta(P) = P(X + 1) - P(X)$.

- a. Montrez que Δ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$. (0,5 point)
- b. Pour $k \geq 1$, montrez que $\Delta(X^k)$ est de degré $k - 1$ et de coefficient dominant k .
Déduisez-en que, si P est de degré $d \geq 1$, alors $\Delta(P)$ est de degré $d - 1$. (1 point)
- c. Déterminez $\text{Ker } \Delta$. (1 point)
- d. Montrez que $\text{Im } \Delta = \mathbb{R}_{n-1}[X]$. (1 point)

e. Montrez que $\Delta^{n+1} = 0$ et que $\Delta^n \neq 0$. (0,5 point)

f. Montrez qu'il existe un unique $P \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que $\Delta(P) = X^2$ et $P(0) = 0$. Vérifiez que $P = \frac{X(X-1)(2X-1)}{6}$, puis déduisez-en la valeur de $\sum_{k=0}^N k^2$ pour tout entier $N \geq 0$. (1 point)

Exercice 4 : Parité et symétrie d'un espace de fonctions (3 points)

Soit $E = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ l'espace des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On note $\mathcal{P}$ le sous-ensemble des fonctions paires et $\mathcal{I}$ celui des fonctions impaires. Pour $f \in E$, on définit $s(f)$ par $s(f)(x) = f(-x)$ pour tout réel x .

a. Montrez que s est linéaire et que $s \circ s = \text{id}$. (0,5 point)

b. Déterminez $\text{Ker}(s - \text{id})$ et $\text{Ker}(s + \text{id})$. (0,5 point)

c. Montrez que $E = \mathcal{P} \oplus \mathcal{I}$, puis que s est la symétrie par rapport à $\mathcal{P}$ parallèlement à $\mathcal{I}$. (1 point)

d. Exprimez le projecteur p sur $\mathcal{P}$ parallèlement à $\mathcal{I}$ à l'aide de s , puis calculez $p(\exp)$ et $(\text{id} - p)(\exp)$. (1 point)

Exercice 5 : Suite des noyaux itérés (4,5 points)

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$ et $u \in \mathcal{L}(E)$. On pose $u^0 = \text{id}$, puis, pour tout entier $k \geq 0$, $N_k = \text{Ker } u^k$ et $d_k = \dim N_k$.

a. Montrez que $N_k \subset N_{k+1}$ pour tout $k \geq 0$. (0,5 point)

b. On suppose qu'il existe $p \geq 0$ tel que $N_p = N_{p+1}$. Montrez que $N_{p+1} = N_{p+2}$,

puis que $N_k = N_p$ pour tout $k \geq p$. (1,5 point)

c. Montrez qu'il existe un plus petit entier r tel que $N_r = N_{r+1}$, que $r \leq n$ et que $d_0 < d_1 < \dots < d_r$. (1 point)

d. On suppose u nilpotent, c'est-à-dire qu'il existe $m \geq 1$ tel que $u^m = 0$. Montrez que $u^n = 0$. (0,5 point)

e. Exemple : soit D la dérivation sur $\mathbb{R}_n[X]$, espace de dimension $n + 1$. Déterminez $\text{Ker } D^k$ pour $1 \leq k \leq n + 1$, puis l'indice de nilpotence de D . La majoration de la question d) peut-elle être améliorée en général ? (1 point)



Réviser avant le contrôle : applications linéaires et théorème du rang

Avant de faire ce contrôle, relisez le cours [« Applications linéaires » en maths sup](#) puis entraînez-vous avec les **exercices corrigés** [applications linéaires](#).

Retrouvez tous les [contrôles de maths sup classés par chapitre](#), ou choisissez un autre niveau sur la page [contrôles de maths du CP au post-bac](#).

Autres contrôles de maths sup sur ce thème

- [Contrôle de maths sup : problème d'algèbre linéaire type concours](#)