

Contrôle de maths spé : théorème spectral et matrices positives

Fiche du contrôle

- **Niveau** : maths spé (MP)
- **Chapitre** : Endomorphismes autoadjoints et théorème spectral
- **Durée conseillée** : 3 heures
- **Barème** : sur 20 points (exercice 1 : 4 points ; exercice 2 : 4 points ; exercice 3 : 3 points ; exercice 4 : 3 points ; exercice 5 : 6 points)
- **Compétences évaluées** :
 - Raisonner : démontrer la caractérisation spectrale des matrices symétriques positives et définies positives
 - Calculer : diagonaliser une matrice symétrique dans une base orthonormée
 - Chercher : construire une racine carrée positive et en prouver l'unicité
 - Communiquer : citer le théorème spectral et en vérifier les hypothèses

Exercice 1 : Question de cours (4 points)

Calculatrice interdite.

Dans tout le sujet, $n \geq 1$ est un entier, $\mathbb{R}^n$ est muni de son produit scalaire canonique $\langle x, y \rangle = {}^t x y$ et de la norme associée. On note $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques réelles, $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ celui des matrices symétriques positives ($\langle Sx, x \rangle \geq 0$ pour tout x) et $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ celui des matrices symétriques définies positives ($\langle Sx, x \rangle > 0$ pour tout $x \neq 0$).

- a. Énoncez le théorème spectral, d'abord pour un endomorphisme autoadjoint d'un espace euclidien,

puis sous forme matricielle. (1 point)

b. Soit $S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Démontrez que $S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ si et seulement si $\text{Sp}(S) \subset \mathbb{R}_+$. (2 points)

c. Énoncez et démontrez la caractérisation spectrale analogue de $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. (1 point)

Exercice 2 : Diagonalisation orthogonale d'une matrice symétrique (4 points)

On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & -2 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

a. Justifiez, sans aucun calcul, que A est diagonalisable dans une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$. (0,5 point)

b. Calculez le polynôme caractéristique de A et déterminez ses valeurs propres. (1 point)

c. Déterminez une matrice orthogonale P et une matrice diagonale D telles que $A = P D {}^t P$. (1,5 point)

d. La matrice A est-elle positive ? Déterminez l'ensemble des réels c tels que $A + c I_3 \in \mathcal{S}_3^{++}(\mathbb{R})$. (1 point)

Exercice 3 : Matrices de Gram (3 points)

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $S = {}^t A A$.

- Montrez que $S \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$. (1 point)
- Montrez que $\ker S = \ker A$. Déduisez-en que $S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ si et seulement si A est inversible. (1 point)
- Réciproquement, montrez que toute matrice de $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ s'écrit ${}^t B B$ avec $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. (1 point)

Exercice 4 : Quotient de Rayleigh (3 points)

Soit $S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, de valeurs propres $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n$ comptées avec multiplicité.

- Démontrez que, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $\lambda_1 |x|^2 \leq \langle Sx, x \rangle \leq \lambda_n |x|^2$. (1,5 point)
- Montrez que $\lambda_n = \max_{|x|=1} \langle Sx, x \rangle$ et précisez en quels vecteurs ce maximum est atteint. (0,5 point)
- Application : déterminez le maximum et le minimum de $q(x, y, z) = 2x^2 + y^2 - 4xy - 4yz$ sur la sphère unité $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, ainsi que des points où ils sont atteints. On pourra utiliser l'exercice 2. (1 point)

Exercice 5 : Problème : racine carrée et décomposition polaire (6 points)

Ce problème construit la racine carrée d'une matrice symétrique positive, puis la décomposition polaire d'une matrice inversible. On note $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ le groupe orthogonal.

- Soit $S \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$. À l'aide du théorème spectral, construisez une matrice $R \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ telle que $R^2 = S$. (1 point)
- Soit $R' \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ telle que $R'^2 = S$. Montrez que R' commute avec S , puis que R' laisse stable chaque sous-espace propre $E_\lambda(S)$. En étudiant l'endomorphisme induit sur

$E_\lambda(S)$, montrez que $R' = R$. (1,5 point)

c. Soit $M \in GL_n(\mathbb{R})$. Montrez qu'il existe un unique couple $(O, R) \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ tel que $M = OR$. (1,5 point)

d. Déterminez la décomposition polaire de $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$ et donnez la nature géométrique de O . (1 point)

e. Pour la matrice M de la question d, déterminez $\max_{|x|=1} |Mx|$ et $\min_{|x|=1} |Mx|$; décrivez l'image par M du cercle unité. (1 point)



Réviser avant le contrôle : théorème spectral et matrices positives

Avant de faire ce contrôle, relisez le cours « [Théorème spectral](#) » en maths spé puis entraînez-vous avec les **exercices corrigés** [théorème spectral](#).

Retrouvez tous les [contrôles de maths spé classés par chapitre](#), ou choisissez un autre niveau sur la page [contrôles de maths du CP au post-bac](#).