

Contrôle de maths spé : suites et séries de fonctions

Fiche du contrôle

- **Niveau** : maths spé (MP)
- **Chapitres** : Suites de fonctions : convergence simple et uniforme + Séries de fonctions
- **Durée conseillée** : 3 heures
- **Barème** : sur 20 points (exercice 1 : 3 points ; exercice 2 : 5 points ; exercice 3 : 6 points ; exercice 4 : 6 points)
- **Compétences évaluées** :
 - Raisonner : distinguer convergence simple, uniforme et normale et choisir le bon mode
 - Calculer : étudier la borne supérieure d'une fonction par un tableau de variation
 - Chercher : localiser un intervalle sur lequel les hypothèses de domination sont satisfaites
 - Communiquer : citer les théorèmes de continuité, de double limite et de dérivation avec leurs hypothèses

Exercice 1 : Question de cours : convergence uniforme et continuité (3 points)

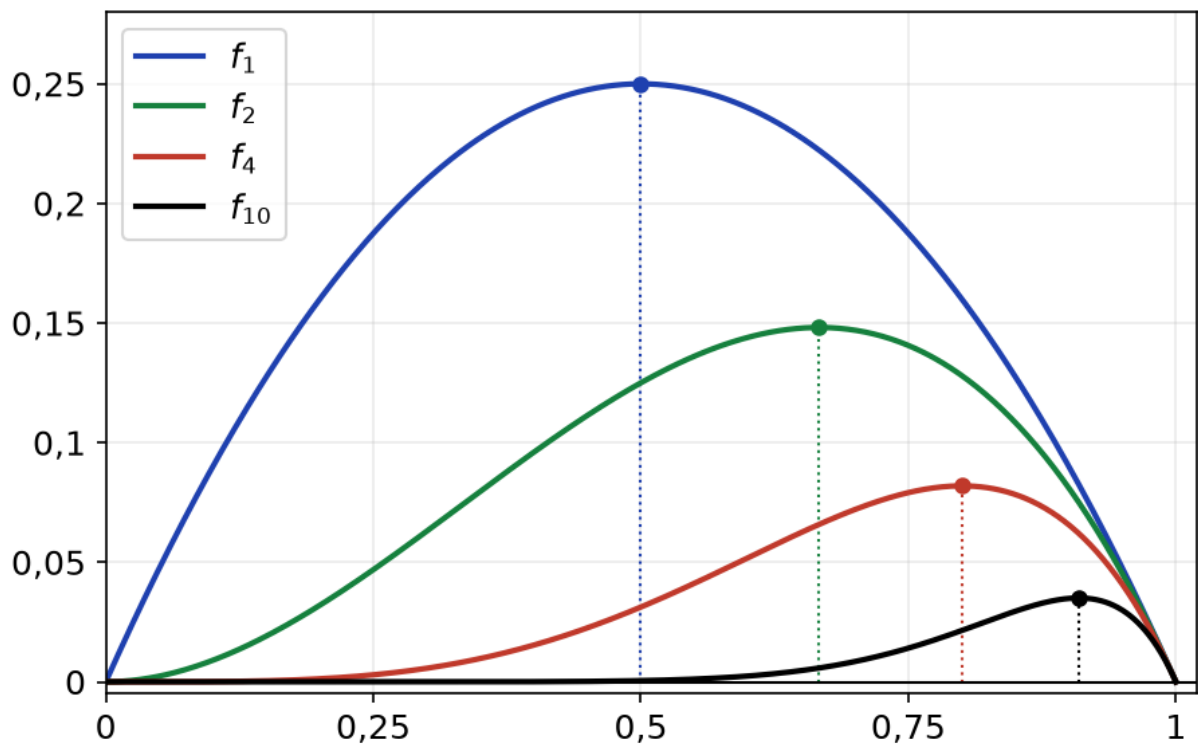
Calculatrice interdite.

Dans tout l'exercice, I est un intervalle de $\mathbb{R}$ et (f_n) une suite de fonctions de I dans $\mathbb{R}$.

- Énoncez le théorème de la double limite pour une suite de fonctions définies sur I , au voisinage d'un point a adhérent à I (éventuellement infini). (1 point)
- On suppose que chaque f_n est continue sur I et que (f_n) converge uniformément sur I vers une fonction f . Démontrez que f est continue sur I . (2 points)

Exercice 2 : Étude de la suite de fonctions $x^n(1-x)$ (5 points)

Pour tout $n \geq 1$ et tout $x \in [0,1]$, on pose $f_n(x) = x^n(1-x)$ et $g_n(x) = n x^n(1-x)$. La figure ci-dessous représente f_1 , f_2 , f_4 et f_{10} .



- Déterminez la limite simple de (f_n) sur $[0,1]$. (0,5 point)
- Dressez le tableau de variation de f_n sur $[0,1]$ et calculez $|f_n|_\infty = \sup_{x \in [0,1]} |f_n(x)|$. (1,5 point)
- Déduisez-en que (f_n) converge uniformément sur $[0,1]$ et donnez un équivalent de $|f_n|_\infty$. (1 point)
- Montrez que (g_n) converge simplement vers la fonction nulle sur $[0,1]$, mais pas uniformément. Montrez ensuite que la convergence est uniforme sur $[0,a]$ pour tout $a \in [0,1[$. (1,5 point)
- Calculez la somme $S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ pour $x \in [0,1]$. La série de fonctions $\sum f_n$

converge-t-elle uniformément sur $[0,1]$? (0,5 point)

Exercice 3 : Une série de fonctions exponentielles (6 points)

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \geq 0$, on pose $u_n(x) = \frac{e^{-nx}}{1+n^2}$, et on note $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x)$.

- Montrez que la série $\sum u_n$ converge normalement sur $[0, +\infty[$. Déduisez-en que S est définie et continue sur $[0, +\infty[$. (1 point)
- Déterminez la limite de S en $+\infty$, puis montrez que $S(x) - 1 \sim \frac{e^{-x}}{2}$ quand $x \rightarrow +\infty$. (1,5 point)
- Montrez que S est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$ et exprimez $S'(x)$ comme la somme d'une série. (1,5 point)
- Pour $x > 0$, on écrit $\frac{n}{1+n^2} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n(1+n^2)}$ pour $n \geq 1$. Montrez que $S'(x) = \ln(1-e^{-x}) + B(x)$, où B est une fonction bornée sur $]0, +\infty[$. Déduisez-en que $S'(x) \sim \ln x$ quand $x \rightarrow 0^+$, puis que S n'est pas dérivable en 0 . (2 points)

Exercice 4 : Problème : la fonction zêta de Riemann (6 points)

Pour $x > 1$, on pose $\zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$. On admet que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \ln 2$.

- Justifiez que ζ est définie sur $]1, +\infty[$. Montrez que la série converge normalement sur $[a, +\infty[$ pour tout $a > 1$, puis que ζ est continue sur $]1, +\infty[$. (1 point)
- Déterminez la limite de ζ en $+\infty$. (0,5 point)

- c. Montrez que ζ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]1, +\infty[$ et qu'elle y est strictement décroissante. (1,5 point)
- d. À l'aide d'une comparaison série-intégrale, établissez que, pour tout $x > 1$:

$$\frac{1}{x-1} \leq \zeta(x) \leq 1 + \frac{1}{x-1}.$$

Déduisez-en un équivalent de $\zeta(x)$ quand $x \rightarrow 1^+$. (1,5 point)

- e. Pour $x \geq 1$, on pose $F(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^x}$. Montrez que $F(x) = (1 - 2^{1-x})\zeta(x)$ pour $x > 1$, puis que F est continue sur $[1, +\infty[$. Retrouvez alors la limite de $(x-1)\zeta(x)$ quand $x \rightarrow 1^+$. (1,5 point)



Réviser avant le contrôle : suites et séries de fonctions

Avant de faire ce contrôle, relisez le cours « [Suites de fonctions](#) » en maths spé et « [Séries de fonctions](#) » en maths spé puis entraînez-vous avec les **exercices corrigés** [suites de fonctions](#), [séries de fonctions](#).

Retrouvez tous les [contrôles de maths spé classés par chapitre](#), ou choisissez un autre niveau sur la page [contrôles de maths du CP au post-bac](#).