

Contrôle de maths spé : séries numériques et sommation des équivalents

Fiche du contrôle

- **Niveau** : maths spé (MP)
- **Chapitre** : Séries numériques et vectorielles
- **Durée conseillée** : 3 heures
- **Barème** : sur 20 points (exercice 1 : 4 points ; exercice 2 : 4 points ; exercice 3 : 4 points ; exercice 4 : 3 points ; exercice 5 : 5 points)
- **Compétences évaluées** :
 - Raisonner : démontrer le théorème de sommation des relations de comparaison
 - Calculer : obtenir un équivalent d'une somme partielle ou d'un reste
 - Chercher : choisir entre d'Alembert, équivalents et comparaison série-intégrale
 - Communiquer : vérifier par écrit les hypothèses de signe de chaque théorème

Exercice 1 : Question de cours : sommation des relations de comparaison (4 points)

Calculatrice interdite. Documents interdits.

Soient (u_n) une suite réelle et (v_n) une suite de réels positifs, telles que $u_n \sim v_n$. Pour une série convergente $\sum w_n$, on note $R_n(w) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} w_k$ son reste ; on note $S_n(w) = \sum_{k=0}^n w_k$ la somme partielle.

- a. Énoncez le théorème de sommation des équivalents, dans le cas où $\sum v_n$ converge puis dans le

cas où elle diverge. (1 point)

b. Démontrez le cas convergent. (1,5 point)

c. Démontrez le cas divergent. (1,5 point)

Exercice 2 : Nature de séries par d'Alembert et équivalents (4 points)

Déterminez la nature des séries suivantes, en justifiant soigneusement.

a. $\sum_{n \geq 1} \frac{n!}{n^n}$ (1 point)

b. $\sum_{n \geq 0} \frac{(2n)!}{(n!)^2 5^n}$ (1 point)

c. $\sum_{n \geq 1} \left(1 - \cos \frac{1}{n}\right)$ (1 point)

d. $\sum_{n \geq 1} \frac{a^n}{n}$, selon la valeur du réel $a > 0$. (1 point)

Exercice 3 : Comparaison série-intégrale (4 points)

a. Soit $f : t \rightarrow \frac{1}{t \ln t}$ sur $[2, +\infty[$. Démontrez que f est décroissante, puis encadrez $S_n = \sum_{k=2}^n \frac{1}{k \ln k}$ à l'aide d'intégrales. Déduisez-en que la série $\sum \frac{1}{k \ln k}$ diverge et que $S_n \sim \ln(\ln n)$. (2,5 points)

b. Pour $n \geq 1$, on note $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$. Démontrez que $\frac{1}{n+1} \leq R_n \leq \frac{1}{n}$, puis donnez un équivalent de R_n . (1,5 point)

Exercice 4 : Série alternée et produit de Cauchy (3 points)

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $a_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$.

a. Démontrez que la série $\sum a_n$ converge. (1 point)

b. Est-elle absolument convergente ? (0,5 point)

c. On note $c_n = \sum_{k=0}^n a_k a_{n-k}$ le terme général du produit de Cauchy de $\sum a_n$ par elle-même. Démontrez que $|c_n| \geq \frac{2(n+1)}{n+2}$, puis que $\sum c_n$ diverge. Quelle hypothèse du théorème sur le produit de Cauchy est en défaut ? (1,5 point)

Exercice 5 : Problème : développement asymptotique de la série harmonique (5 points)

Pour $n \geq 1$, on note $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ et $u_n = H_n - \ln n$. Pour $n \geq 2$, on pose $w_n = u_n - u_{n-1}$.

a. Démontrez que $w_n = \frac{1}{n} + \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right)$, puis que $w_n \sim -\frac{1}{2n^2}$. Déduisez-en que la suite (u_n) converge. On note γ sa limite (constante d'Euler). (1,5 point)

b. Exprimez $u_n - \gamma$ comme le reste d'une série, puis démontrez que $u_n - \gamma \sim \frac{1}{2n}$. Vous citerez précisément le théorème utilisé et vous utiliserez l'exercice 3. Écrivez le développement asymptotique de H_n obtenu. (2 points)

c. Déduisez-en que $\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} = \ln 2 - \frac{1}{4n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$. (1 point)

d. Quelle est la nature de la série de terme général $\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} - \ln 2$? (0,5 point)



Réviser avant le contrôle : séries numériques et sommation des équivalents

Avant de faire ce contrôle, relisez le cours « [Séries numériques et vectorielles](#) » en maths spé puis entraînez-vous avec les **exercices corrigés** [séries numériques et vectorielles](#).

Retrouvez tous les [contrôles de maths spé classés par chapitre](#), ou choisissez un autre niveau sur la page [contrôles de maths du CP au post-bac](#).