

Contrôle de maths spé : séries entières et développements usuels

Fiche du contrôle

- **Niveau** : maths spé (MP)
- **Chapitre** : Séries entières
- **Durée conseillée** : 3 heures
- **Barème** : sur 20 points (exercice 1 : 3 points ; exercice 2 : 4 points ; exercice 3 : 5 points ; exercice 4 : 4 points ; exercice 5 : 4 points)
- **Compétences évaluées** :
 - Raisonner : démontrer le lemme d'Abel et justifier la valeur d'un rayon de convergence
 - Calculer : obtenir un développement en série entière par primitivation ou dérivation terme à terme
 - Modéliser : traduire une équation différentielle ou une récurrence en relation entre coefficients
 - Communiquer : invoquer l'unicité du développement et les théorèmes de régularité de la somme

Exercice 1 : Question de cours : lemme d'Abel et rayon de convergence (3 points)

Calculatrice interdite.

Soit (a_n) une suite de nombres complexes.

- a. Énoncez et démontrez le lemme d'Abel : si la suite $(a_n z_0^n)$ est bornée pour un complexe $z_0 \neq 0$, alors la série $\sum a_n z^n$ converge absolument pour tout z tel que $|z| < |z_0|$. (1,5

point)

- b. Donnez la définition du rayon de convergence R de la série entière $\sum a_n z^n$. (0,5 point)
- c. Énoncez le théorème de dérivation terme à terme d'une série entière de la variable réelle de rayon $R > 0$. (1 point)

Exercice 2 : Deux rayons de convergence (4 points)

- a. Déterminez le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n \geq 0} n! z^{n^2}$. (1,5 point)
- b. Pour $n \geq 0$, on pose $a_n = \sqrt{n^2+1} - n$.
- i. Déterminez un équivalent simple de a_n , puis le rayon de convergence de $\sum a_n x^n$. (1 point)
- ii. Étudiez la nature de la série numérique $\sum a_n x^n$ pour $x = 1$, puis pour $x = -1$. (1,5 point)

Exercice 3 : Développement usuels et calcul de sommes (5 points)

- a. À partir du développement de $\frac{1}{1+t}$, établissez les développements en série entière de $\ln(1+x)$ et de $\arctan x$, en précisant leur rayon. (1,5 point)
- b. Soit $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$.
- i. Déterminez les séries entières $y(x) = \sum a_n x^n$ de rayon non nul telles que $a_0 = 1$ et $(1+x)y'(x) = \alpha y(x)$. Calculez leur rayon. (1 point)
- ii. En étudiant la fonction $x \rightarrow y(x)(1+x)^{-\alpha}$ sur $] -1, 1[$, déduisez-en le développement de $(1+x)^\alpha$. (1 point)

- c. Pour $x \in]-1,1[$, calculez $\sum_{n=0}^{+\infty} n x^n$ puis $\sum_{n=0}^{+\infty} n^2 x^n$. Déduisez-en la valeur de $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2}{2^n}$. (1,5 point)

Exercice 4 : Une équation différentielle résolue par série entière (4 points)

On considère l'équation différentielle $(E): x y'' + 2 y' + x y = 0$ sur $\mathbb{R}$.

- Soit $y(x) = \sum a_n x^n$ une série entière de rayon $R > 0$. Montrez que y est solution de (E) sur $] -R, R[$ si et seulement si $a_1 = 0$ et $(n+1)(n+2) a_{n+1} + a_{n-1} = 0$ pour tout $n \geq 1$. (2 points)
- Exprimez a_{2k} et a_{2k+1} en fonction de a_0 et de k . Déterminez le rayon de la série obtenue et calculez sa somme à l'aide d'une fonction usuelle. (1,5 point)
- Décrivez l'ensemble des solutions de (E) développables en série entière au voisinage de 0. (0,5 point)

Exercice 5 : Problème : une récurrence et sa série génératrice (4 points)

On définit la suite (t_n) par $t_0 = t_1 = 1$ et $t_{n+1} = t_n + n t_{n-1}$ pour tout $n \geq 1$. On pose $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t_n}{n!} x^n$.

- Montrez par récurrence que $0 < t_n \leq n!$ pour tout n . Déduisez-en que le rayon de convergence de f est au moins 1. (1 point)
- Montrez que $f'(x) = (1+x) f(x)$ pour tout $x \in]-1,1[$. (1 point)

c. Déduisez-en une expression de $f(x)$ à l'aide de la fonction exponentielle. (0,5 point)

d. À l'aide d'un produit de Cauchy, établissez que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$t_n = \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \frac{n!}{2^k k! (n-2k)!}.$$

Vérifiez cette formule pour $n = 5$ en calculant t_5 par la récurrence. Que peut-on dire du rayon de convergence de f ? (1,5 point)



Réviser avant le contrôle : séries entières et développements usuels

Avant de faire ce contrôle, relisez le cours « [Séries entières](#) » en maths spé puis entraînez-vous avec les **exercices corrigés** [séries entières](#).

Retrouvez tous les [contrôles de maths spé classés par chapitre](#), ou choisissez un autre niveau sur la page [contrôles de maths du CP au post-bac](#).