Contrôle de maths spé : polynôme minimal, noyaux et Cayley-Hamilton

Fiche du contrôle

- **Niveau :** maths spé (MP)
- **Chapitre :** Polynômes d'endomorphismes et Cayley-Hamilton
- **Durée conseillée :** 3 heures
- **Barème :** sur 20 points (exercice 1 : 4 points ; exercice 2 : 5 points ; exercice 3 : 4 points ; exercice 4 : 3 points ; exercice 5 : 4 points)
- **Compétences évaluées :**
  - Raisonner : démontrer le lemme de décomposition des noyaux à l'aide de Bézout
  - Calculer : déterminer un polynôme minimal, une puissance et un inverse polynomiaux
  - Chercher : prouver une diagonalisabilité grâce à un polynôme annulateur simplement scindé
  - Modéliser : codiagonaliser deux endomorphismes qui commutent

Exercice 1 : Question de cours (4 points)

Calculatrice interdite.

Dans tout le sujet, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$, et μ_u désigne le polynôme minimal d'un endomorphisme u de E.

a. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et P_1, P_2 deux polynômes premiers entre eux. Démontrez que

$$\ker\big((P_1P_2)(u)\big) = \ker\big(P_1(u)\big) \oplus \ker\big(P_2(u)\big).$$

Téléchargé depuis https://mathovore.fr - Mathovore site de maths.

Indiquez comment on étend ce résultat à un produit de r polynômes deux à deux premiers entre eux. *(3 points)*

b. Énoncez le théorème de Cayley-Hamilton. Qu'en déduit-on pour le degré de μ_u ? *(1 point)*

Exercice 2 : Polynôme minimal d'une matrice (5 points)

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

a. Calculez A^2, puis vérifiez que $(A + I_3)(A - 2I_3) = 0$. *(1 point)*

b. Déterminez le polynôme minimal de A. *(1 point)*

c. Justifiez que A est diagonalisable, déterminez son spectre et, à l'aide de la trace, la multiplicité de chaque valeur propre. Donnez χ_A. *(1 point)*

d. Justifiez que A est inversible et exprimez A^{-1} comme polynôme en A. *(0,5 point)*

e. Pour $n \in \mathbb{N}$, déterminez le reste de la division euclidienne de X^n par $(X+1)(X-2)$. Déduisez-en les coefficients de A^n. *(1,5 point)*

Exercice 3 : Polynômes annulateurs (4 points)

a. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^3 = A$. Montrez que A est diagonalisable sur $\mathbb{R}$ et que $\mathrm{Sp}(A) \subset \{-1, 0, 1\}$. *(1 point)*

b. Avec la même matrice A, démontrez que $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{tr}(A^2)$. *(1 point)*

c. Soit p un projecteur et s une symétrie de E. À l'aide du lemme des noyaux, montrez que p et s sont diagonalisables, que $\mathrm{rg}(p) = \mathrm{tr}(p)$ et que $E = \ker(s - \mathrm{id}) \oplus \ker(s + \mathrm{id})$. *(1 point)*

d. Soit $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $B^2 = -I_n$. Montrez que n est pair, que B n'est pas diagonalisable sur $\mathbb{R}$, mais qu'elle l'est sur $\mathbb{C}$. *(1 point)*

Exercice 4 : L'algèbre K[u] (3 points)

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et d le degré de μ_u. On note $\mathbb{K}[u] = \{P(u) : P \in \mathbb{K}[X]\}$.

a. Montrez que $(\mathrm{id}, u, \ldots, u^{d-1})$ est une base de $\mathbb{K}[u]$. Quelle est la dimension de $\mathbb{K}[u]$? *(1,5 point)*

b. Montrez que u est inversible si et seulement si $\mu_u(0) \neq 0$, et que dans ce cas $u^{-1} \in \mathbb{K}[u]$. Retrouvez le résultat de l'exercice 2 d). *(1,5 point)*

Exercice 5 : Codiagonalisation (4 points)

Soit u et v deux endomorphismes diagonalisables de E tels que $u \circ v = v \circ u$.

a. Montrez que chaque sous-espace propre $E_\lambda(u)$ est stable par v. *(0,5 point)*

b. On note v_λ l'endomorphisme induit par v sur $E_\lambda(u)$. Montrez que v_λ est diagonalisable. *(1 point)*

c. Déduisez-en qu'il existe une base de E formée de vecteurs propres communs à u et v. *(1 point)*

d. Application : on pose $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Vérifiez que $MN = NM$, puis trouvez une matrice inversible P telle que $P^{-1}MP$ et $P^{-1}NP$ soient toutes deux diagonales. *(1 point)*

e. Montrez la réciproque : si u et v sont diagonalisables dans une même base, ils commutent. *(0,5 point)*

Téléchargé depuis https://mathovore.fr - Mathovore site de maths.

Réviser avant le contrôle : polynôme minimal, noyaux et Cayley-Hamilton

Avant de faire ce contrôle, relisez le cours « Polynômes d'endomorphismes » en maths spé puis entraînez-vous avec les **exercices corrigés** polynômes d'endomorphismes.

Retrouvez tous les **contrôles de maths spé** classés par chapitre, ou choisissez un autre niveau sur la page contrôles de maths du CP au post-bac.

Autres contrôles de maths spé sur ce thème

- Contrôle de maths spé : DS de réduction des endomorphismes