

Contrôle de maths spé : ouverts, fermés, adhérence et continuité

Fiche du contrôle

- **Niveau** : maths spé (MP)
- **Chapitre** : Topologie d'un espace normé et continuité
- **Durée conseillée** : 2 heures
- **Barème** : sur 20 points (exercice 1 : 3 points ; exercice 2 : 5 points ; exercice 3 : 4 points ; exercice 4 : 3 points ; exercice 5 : 5 points)
- **Compétences évaluées** :
 - Raisonner : utiliser les caractérisations séquentielles des fermés et de l'adhérence
 - Calculer : déterminer une norme subordonnée et un vecteur qui l'atteint
 - Représenter : décrire l'intérieur et l'adhérence d'une partie du plan sur une figure
 - Modéliser : prolonger une égalité par continuité et densité

Exercice 1 : Question de cours : fermés et continuité (3 points)

Calculatrice interdite. Documents interdits.

Dans cet exercice, E et F sont deux espaces vectoriels normés. Une partie de E est dite fermée si son complémentaire est ouvert.

- Énoncez puis démontrez la caractérisation séquentielle des parties fermées de E . (2 points)
- Soit $f : E \rightarrow F$ continue et U un ouvert de F . Démontrez que $f^{-1}(U)$ est un ouvert de E . Qu'en déduit-on pour l'image réciproque d'un fermé ? (1 point)

Exercice 2 : Parties remarquables de $M_n(\mathbb{R})$ (5 points)

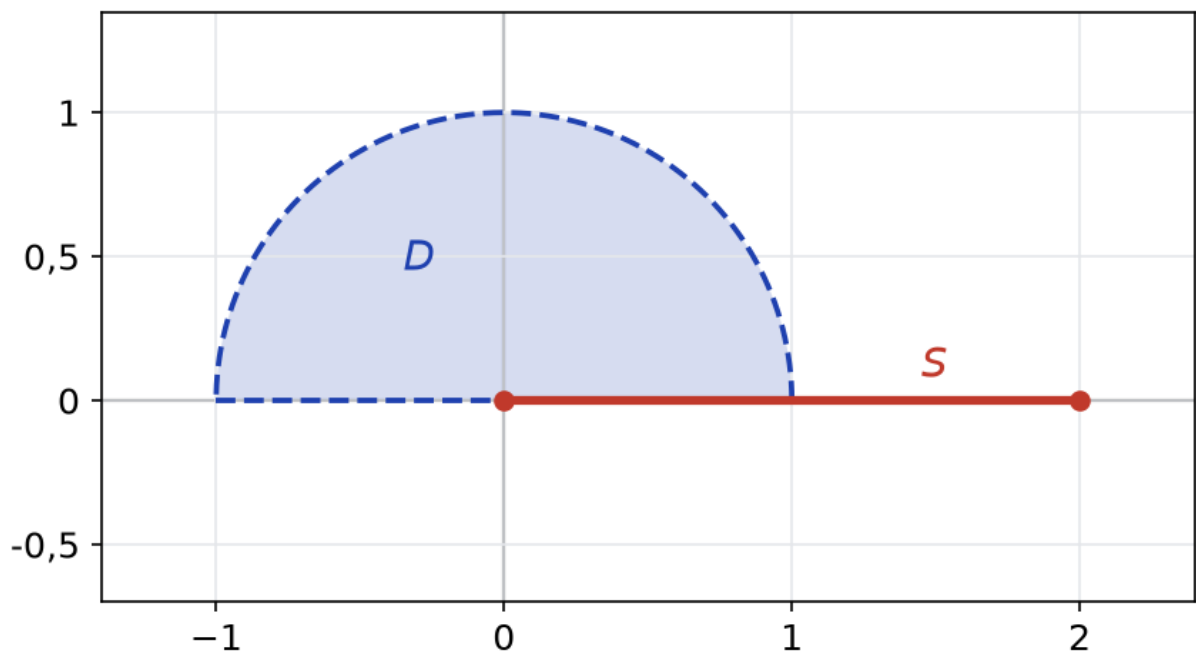
Soit $n \geq 2$. On munit $M_n(\mathbb{R})$ de la norme $|M| = \max_{i,j} |m_{ij}|$.

- Démontrez que l'application $\det : M_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ est continue, puis que $GL_n(\mathbb{R})$ est un ouvert de $M_n(\mathbb{R})$. (1,5 point)
- Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$. Démontrez que $A - \frac{1}{p} I_n$ est inversible pour tout entier p assez grand. Déduisez-en que $GL_n(\mathbb{R})$ est dense dans $M_n(\mathbb{R})$. (1,5 point)
- On admet que le rang d'une matrice est la taille maximale d'une matrice carrée inversible extraite de celle-ci. Soit $r \in \{0, 1, \dots, n-1\}$. Démontrez que $\mathcal{R}_r = \{M \in M_n(\mathbb{R}) : \text{rg } M \leq r\}$ est une partie fermée de $M_n(\mathbb{R})$. (2 points)

Exercice 3 : Intérieur et adhérence d'une partie du plan (4 points)

On munit $\mathbb{R}^2$ de la norme euclidienne. On considère le demi-disque ouvert

$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1 \text{ et } y > 0\}$, le segment $S = [0, 2] \times \{0\}$ et leur réunion $A = D \cup S$.



- Démontrez que D est un ouvert de $\mathbb{R}^2$ en l'écrivant à l'aide d'images réciproques. (1 point)
- Déterminez l'intérieur de A . (1,5 point)
- Déterminez l'adhérence de A . On pourra utiliser le point $c = \left(0, \frac{1}{2}\right)$. (1,5 point)

Exercice 4 : Applications linéaires continues et normes subordonnées (3 points)

- On munit $\mathbb{R}^n$ de $\|x\|_\infty = \max_i |x_i|$. Soit $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $u: x \rightarrow Ax$. Démontrez que u est continue et que sa norme subordonnée vaut

$$\|u\| = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}|. \quad (1,5 \text{ point})$$
- Application : calculez $\|u\|$ pour $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ et donnez un vecteur x tel que $\|x\|_\infty = 1$ et $\|Ax\|_\infty = \|u\|$. (0,5 point)
- Sur $\mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ muni de $\|f\|_\infty$, on pose $\varphi(f) = f(1) - f(0)$. Démontrez que la forme linéaire φ est continue et calculez $\|\varphi\|$. (1 point)

Exercice 5 : Problème : prolongement d'égalités par densité (5 points)

On conserve la norme de l'exercice 2 sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Pour $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on note $\chi_M = \det(X I_n - M)$.

- Soient E et F deux espaces normés, $f, g: E \rightarrow F$ continues, et Δ une partie dense de E . Démontrez que si f et g coïncident sur Δ , alors $f = g$. (1 point)
- Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ avec A inversible. Démontrez que $\chi_{AB} = \chi_{BA}$. (1 point)
- On fixe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $x \in \mathbb{R}$. Démontrez que les applications $A \rightarrow \det(x I_n - AB)$ et $A \rightarrow \det(x I_n - BA)$ sont continues sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. (1 point)
- Déduisez-en que $\chi_{AB} = \chi_{BA}$ pour toutes matrices $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. (1 point)
- Démontrez que l'ensemble $\mathcal{P} = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) : M^2 = M\}$ des matrices de projecteurs est fermé. Est-il ouvert ? (1 point)



Réviser avant le contrôle : ouverts, fermés, adhérence et continuité

Avant de faire ce contrôle, relisez le cours « [Topologie et continuité](#) » en maths spé puis entraînez-vous avec les **exercices corrigés** [topologie et continuité](#).

Retrouvez tous les [contrôles de maths spé classés par chapitre](#), ou choisissez un autre niveau sur la page [contrôles de maths du CP au post-bac](#).