

Contrôle de maths spé : normes, boules et normes équivalentes

Fiche du contrôle

- **Niveau** : maths spé (MP)
- **Chapitre** : Normes, espaces vectoriels normés et suites
- **Durée conseillée** : 2 heures
- **Barème** : sur 20 points (exercice 1 : 3 points ; exercice 2 : 4 points ; exercice 3 : 3 points ; exercice 4 : 4 points ; exercice 5 : 6 points)
- **Compétences évaluées** :
 - Raisonner : vérifier les axiomes d'une norme, en particulier la séparation
 - Calculer : comparer deux normes par des inégalités à constantes optimales
 - Représenter : dessiner les boules unités des normes usuelles du plan
 - Chercher : construire une suite qui prouve la non-équivalence de deux normes

Exercice 1 : Question de cours : normes usuelles sur $\mathbb{K}^n$ (3 points)

Calculatrice interdite. Documents interdits.

Dans tout le sujet, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Pour $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$, on pose

$$\|x\|_1 = \sum_{k=1}^n |x_k|, \quad \|x\|_2 = \left(\sum_{k=1}^n |x_k|^2 \right)^{1/2} \quad \text{et} \quad \|x\|_\infty = \max_{1 \leq k \leq n} |x_k|.$$

- Donnez la définition d'une norme sur un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel E . (1 point)
- Démontrez que, pour tout $x \in \mathbb{K}^n$:

$$\|x\|_{\infty} \leq \|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq \sqrt{n} \|x\|_2 \leq n \|x\|_{\infty}.$$

Vous citerez précisément l'inégalité utilisée pour la troisième inégalité. (2 points)

Exercice 2 : Normes sur des espaces de fonctions et de polynômes (4 points)

Soit $E = \mathcal{C}^1([0, 1], \mathbb{R})$. Pour $f \in E$, on pose $\|f\|_{\infty} = \sup_{x \in [0, 1]} |f(x)|$ et $N(f) = |f(0)| + \|f'\|_{\infty}$.

- Démontrez que N est une norme sur E . (1 point)
- Démontrez que $\|f\|_{\infty} \leq N(f)$ pour tout $f \in E$. (1 point)
- À l'aide des fonctions $g_n : x \rightarrow x^n$, démontrez que les normes N et $\|\cdot\|_{\infty}$ ne sont pas équivalentes sur E . (1 point)
- Démontrez que $P \mapsto \sup_{t \in [0, 1]} |P(t)|$ définit une norme sur $\mathbb{R}[X]$. (1 point)

Exercice 3 : Boules unités dans le plan (3 points)

On se place dans $\mathbb{R}^2$, muni des normes $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_{\infty}$ de l'exercice 1.

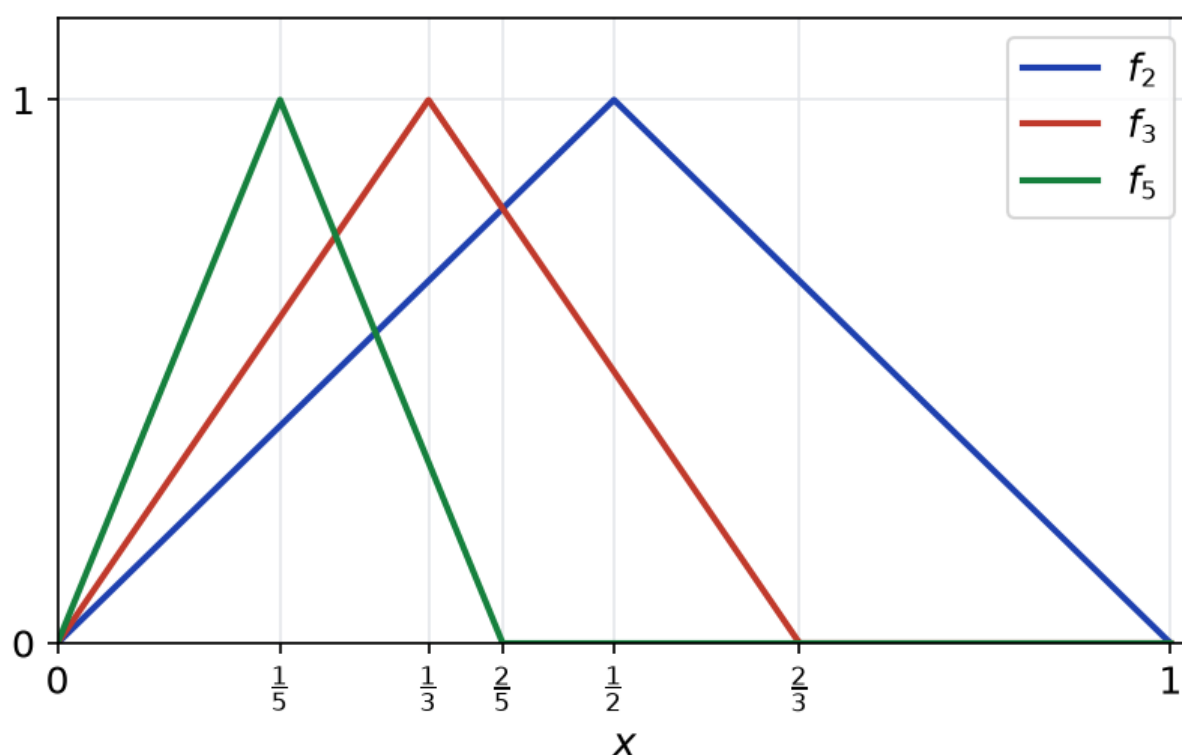
- Représentez sur un même dessin les boules unités fermées $B_1 = \{u : \|u\|_1 \leq 1\}$ et $B_{\infty} = \{u : \|u\|_{\infty} \leq 1\}$, en justifiant leur forme. (1 point)
- Démontrez que $\|u\|_{\infty} \leq \|u\|_1 \leq 2 \|u\|_{\infty}$ pour tout $u \in \mathbb{R}^2$, que les constantes 1 et 2 sont optimales, puis que $B_{\infty}\left(0, \frac{1}{2}\right) \subset B_1 \subset B_{\infty}$. (1 point)
- Démontrez que, dans un espace normé quelconque, toute boule fermée $B_f(a, r)$ est convexe. (1 point)

point)

Exercice 4 : Fonctions chapeaux et normes non équivalentes (4 points)

Soit $F = \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$, muni de $|f|_\infty = \sup_{[0, 1]} |f|$ et de $|f|_1 = \int_0^1 |f(t)| dt$. On admet que ce sont deux normes. Pour $n \geq 2$, on définit la fonction chapeau f_n par :

$$f_n(x) = 1 - n \left| x - \frac{1}{n} \right| \text{ si } 0 \leq x \leq \frac{2}{n}, \quad f_n(x) = 0 \text{ si } \frac{2}{n} \leq x \leq 1.$$



a. Démontrez que $|f|_1 \leq |f|_\infty$ pour tout $f \in F$. (0,5 point)

b. Justifiez que $f_n \in F$, puis calculez $|f_n|_\infty$ et $|f_n|_1$. (1,5 point)

- c. Déduisez-en que les normes $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_\infty$ ne sont pas équivalentes sur F . (1 point)
- d. La suite (f_n) converge-t-elle dans $(F, \|\cdot\|_1)$? dans $(F, \|\cdot\|_\infty)$? Justifiez. (1 point)

Exercice 5 : Problème : suites de matrices et valeurs d'adhérence (6 points)

Partie A. On munit $M_2(\mathbb{R})$ de la norme $N(M) = \max_{1 \leq i, j \leq 2} |m_{ij}|$.

- a. Démontrez qu'une suite (M_k) de matrices converge vers L pour N si et seulement si, pour tous i, j , la suite des coefficients $(M_k)_{ij}$ converge vers L_{ij} . (1 point)
- b. Rappelez la définition d'une valeur d'adhérence d'une suite d'un espace normé, et démontrez qu'une suite convergente en possède une seule. Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Calculez A^2 et A^4 , trouvez quatre valeurs d'adhérence de (A^k) et concluez sur sa nature. (1,5 point)
- c. Soit $B = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. On note $R_\theta = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$ et l'on admet que $R_\theta R_\varphi = R_{\theta + \varphi}$. Écrivez B sous la forme ρR_θ , puis démontrez que (B^k) converge vers la matrice nulle. (1,5 point)

Partie B. Dans $\mathbb{R}^2$ muni de $\|\cdot\|_\infty$, on considère la suite définie pour $n \geq 1$ par :

$$u_n = \left((-1)^n + \frac{1}{n}, \cos\left(\frac{2n\pi}{3}\right) \right).$$

- d. Déterminez l'ensemble des valeurs d'adhérence de (u_n) . Vous étudierez les suites extraites $(u_{6p+r})_p$ pour $r \in \{0, 1, \dots, 5\}$, puis vous démontrerez qu'il n'y en a pas d'autres. (2 points)



Réviser avant le contrôle : normes, boules et normes équivalentes

Avant de faire ce contrôle, relisez le cours « [Espaces vectoriels normés](#) » en [maths spé](#) puis entraînez-vous avec les **exercices corrigés** [espaces vectoriels normés](#).

Retrouvez tous les [contrôles de maths spé classés par chapitre](#), ou choisissez un autre niveau sur la page [contrôles de maths du CP au post-bac](#).