

Contrôle de maths spé : intégrales généralisées et intégrabilité

Fiche du contrôle

- **Niveau** : maths spé (MP)
- **Chapitre** : Intégrales généralisées et fonctions intégrables
- **Durée conseillée** : 2 heures
- **Barème** : sur 20 points (exercice 1 : 4 points ; exercice 2 : 4 points ; exercice 3 : 4 points ; exercice 4 : 4 points ; exercice 5 : 4 points)
- **Compétences évaluées** :
 - Raisonner : démontrer les critères de Riemann et le théorème de comparaison des fonctions positives
 - Calculer : mener une intégration par parties ou un changement de variable sur un intervalle ouvert
 - Chercher : trouver une fonction de comparaison adaptée au voisinage d'une borne
 - Communiquer : distinguer intégrale convergente et fonction intégrable

Exercice 1 : Question de cours : intégrales de Riemann et comparaison (4 points)

Calculatrice interdite.

- a. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Énoncez et démontrez une condition nécessaire et suffisante sur α pour que

$\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha}$ converge, puis pour que $\int_0^1 \frac{dt}{t^\alpha}$ converge. (2 points)

- b. Soit f et g deux fonctions continues par morceaux sur $[a, b[$, avec $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, telles que $0 \leq f \leq g$. Énoncez et démontrez le théorème de comparaison reliant l'intégrabilité de f

à celle de g . (1,5 point)

c. Énoncez la version de ce théorème utilisant un équivalent au voisinage de b . (0,5 point)

Exercice 2 : Intégrabilité de $x^a \ln x$ sur $]0, 1]$ (4 points)

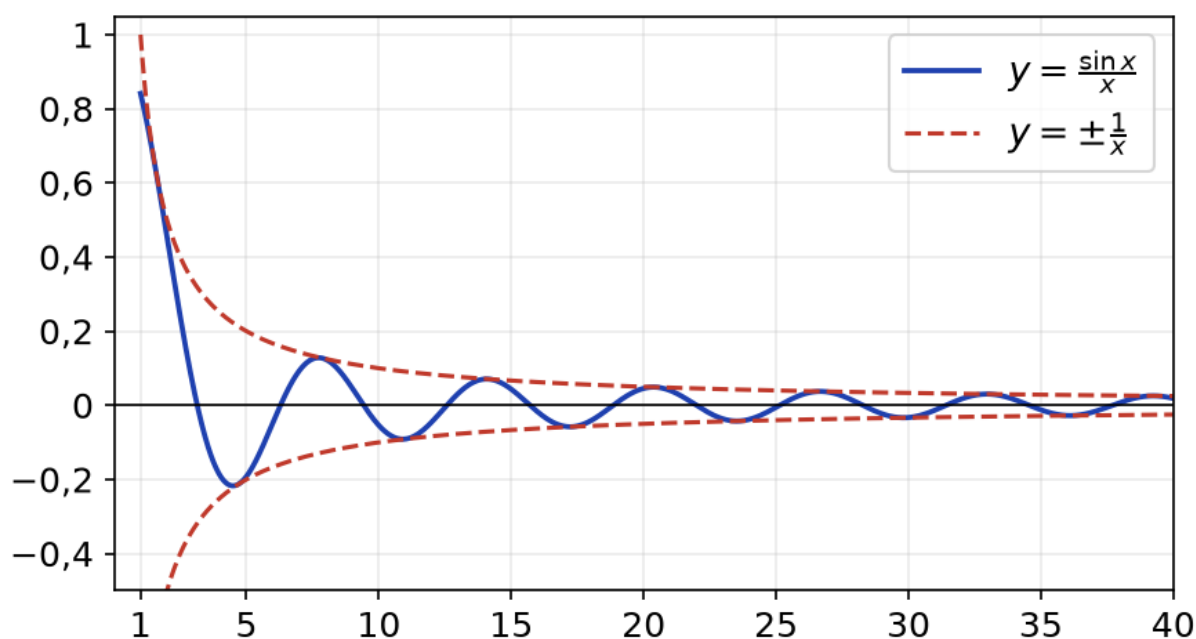
Soit $a \in \mathbb{R}$ et $f_a(x) = x^a \ln x$ pour $x \in]0, 1]$.

a. Montrez que f_a est intégrable sur $]0, 1]$ si et seulement si $a > -1$. (2 points)

b. Pour $a > -1$, calculez $\int_0^1 x^a \ln x \, dx$ par une intégration par parties sur $[\varepsilon, 1]$, avec $\varepsilon \in]0, 1[$. (2 points)

Exercice 3 : Une intégrale convergente non absolument (4 points)

La figure ci-dessous représente la fonction $x \rightarrow \frac{\sin x}{x}$ sur $[1, 40]$, encadrée par les courbes de $x \rightarrow \frac{1}{x}$ et $x \rightarrow -\frac{1}{x}$.



- a. À l'aide d'une intégration par parties sur $[1, X]$, montrez que l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ converge. (1,5 point)
- b. Justifiez que $|\sin x| \geq \sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$, puis montrez que la fonction $x \rightarrow \frac{\sin x}{x}$ n'est pas intégrable sur $[1, +\infty[$. (2 points)
- c. Pour $X \geq 1$, on pose $R(X) = \int_X^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$. Montrez que $|R(X)| \leq \frac{2}{X}$. (0,5 point)

Exercice 4 : Intégration par parties et changement de variable (4 points)

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \int_0^{+\infty} t^n e^{-t} dt$.

- a. Montrez que I_n est bien définie. (1 point)

b. Établissez une relation entre I_{n+1} et I_n , puis calculez I_n . (1,5 point)

c. Par le changement de variable $t = u^2$, dont vous justifierez la validité, calculez

$$\int_0^{+\infty} u^{2n+1} e^{-u^2} du. \text{ (1,5 point)}$$

Exercice 5 : Problème : équivalent d'un reste d'intégrale (4 points)

Pour $x \geq 0$, on pose $R(x) = \int_x^{+\infty} e^{-t^2} dt$.

a. Montrez que $R(x)$ est bien défini, que R est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, +\infty[$ et calculez $R'(x)$. (1 point)

b. Pour $x > 0$, montrez que $R(x) = \frac{e^{-x^2}}{2x} - \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t^2}}{2t^2} dt$. Déduisez-en que $R(x) \sim \frac{e^{-x^2}}{2x}$ quand $x \rightarrow +\infty$. (2 points)

c. Montrez que $\int_0^{+\infty} R(x) dx$ converge et calculez sa valeur. (1 point)



Réviser avant le contrôle : intégrales généralisées et intégrabilité

Avant de faire ce contrôle, relisez le cours « [Intégrales généralisées](#) » en maths spé puis entraînez-vous

avec les **exercices corrigés** [intégrales généralisées](#).

Retrouvez tous les [contrôles de maths spé classés par chapitre](#), ou choisissez un autre niveau sur la page [contrôles de maths du CP au post-bac](#).