Contrôle de maths spé : intégrales à paramètre et fonction Gamma

Fiche du contrôle

- **Niveau :** maths spé (MP)
- **Chapitre :** Intégrales à paramètre
- **Durée conseillée :** 3 heures
- **Barème :** sur 20 points (exercice 1 : 3 points ; exercice 2 : 5 points ; exercice 3 : 4 points ; exercice 4 : 8 points)
- **Compétences évaluées :**
  - Raisonner : énoncer les théorèmes de continuité et de dérivation sous le signe intégrale
  - Chercher : construire une domination locale sur un segment ou une demi-droite
  - Calculer : intégrer par parties sur un intervalle ouvert et résoudre une équation différentielle
  - Communiquer : vérifier par écrit chaque hypothèse avant d'appliquer un théorème

Exercice 1 : Question de cours : régularité d'une intégrale à paramètre (3 points)

Calculatrice interdite. Documents interdits.

Dans cet exercice, A est un intervalle de $\mathbb{R}$, I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : A \times I \to \mathbb{C}$.

a. Énoncez le théorème de continuité d'une intégrale à paramètre $g(x) = \int_I f(x,t)\,\mathrm{d}t$, avec l'hypothèse de domination. *(1 point)*

Téléchargé depuis https://mathovore.fr - Mathovore site de maths.

b. Énoncez le théorème de dérivation sous le signe intégrale, qui donne la classe C^1 de g et l'expression de g'. *(1 point)*

c. On pose $h(x) = \int_0^{+\infty} e^{-xt}\,\mathrm{d}t$ pour $x > 0$. Montrez qu'il n'existe aucune fonction intégrable φ sur $[0, +\infty[$ telle que $e^{-xt} \leq \varphi(t)$ pour tout $x > 0$ et tout $t \geq 0$. Expliquez comment on prouve malgré tout la continuité de h sur $]0, +\infty[$ par le théorème de a). *(1 point)*

Exercice 2 : Une intégrale gaussienne à paramètre (5 points)

On admet que $\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$. Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $F(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t^2}\cos(xt)\,\mathrm{d}t$.

a. Montrez que F est définie et continue sur $\mathbb{R}$. *(1 point)*

b. Montrez que F est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et exprimez $F'(x)$ sous forme d'une intégrale. *(1,5 point)*

c. À l'aide d'une intégration par parties soigneusement justifiée, montrez que $F'(x) = -\frac{x}{2}F(x)$ pour tout réel x. *(1,5 point)*

d. En déduire l'expression de $F(x)$ pour tout réel x. *(1 point)*

Exercice 3 : Une transformée de Laplace (4 points)

Pour $x \geq 0$, on pose $G(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$.

a. Montrez que G est définie et continue sur $[0, +\infty[$ et calculez $G(0)$. *(1 point)*

b. Montrez que G est de classe C^2 sur $]0, +\infty[$ et que $G''(x) + G(x) = \frac{1}{x}$ pour tout $x > 0$. *(1,5 point)*

c. Montrez que $0 \leq G(x) \leq \frac{1}{x}$ pour $x > 0$ et en déduire la limite de G en $+\infty$. *(0,5 point)*

d. À l'aide du changement de variable $u = xt$ et du théorème de convergence dominée, montrez que $G(x) \sim \frac{1}{x}$ quand $x \to +\infty$. *(1 point)*

Exercice 4 : Problème : la fonction Gamma d'Euler (8 points)

On pose, lorsque l'intégrale converge, $\Gamma(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1}\, e^{-t}\, \mathrm{d}t$.

a. **Domaine.** Montrez que $t \to t^{x-1}\, e^{-t}$ est intégrable sur $]0, +\infty[$ si et seulement si $x > 0$. *(1 point)*

b. **Relation fonctionnelle.** Montrez que $\Gamma(x+1) = x\,\Gamma(x)$ pour tout $x > 0$, puis calculez $\Gamma(n+1)$ pour $n \in \mathbb{N}$. *(1 point)*

c. **Régularité.** Montrez que Γ est de classe C^∞ sur $]0, +\infty[$ et que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\Gamma^{(k)}(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} (\ln t)^k\, t^{x-1}\, e^{-t}\, \mathrm{d}t$. On utilisera une domination sur tout segment $[a, b]$ inclus dans $]0, +\infty[$. *(2 points)*

d. **Convexité.** Montrez que Γ est convexe, puis, à l'aide de l'inégalité de Cauchy-Schwarz, que $\Gamma'(x)^2 \leq \Gamma(x)\,\Gamma''(x)$. En déduire que $\ln \Gamma$ est convexe sur $]0, +\infty[$. *(1,5 point)*

e. **Variations.** Montrez que Γ' s'annule en un unique réel α et que $\alpha \in]1, 2[$. Dressez le tableau de variations de Γ et déterminez sa limite en $+\infty$. *(1 point)*

f. **Comportement en 0.** Montrez que $\Gamma(x) \sim \frac{1}{x}$ quand $x \to 0^+$. *(0,5 point)*

Téléchargé depuis https://mathovore.fr - Mathovore site de maths.

g. **Une valeur.** À l'aide du résultat admis dans l'exercice 2, calculez $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$, puis $\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)$. *(1 point)*

Réviser avant le contrôle : intégrales à paramètre et fonction Gamma

Avant de faire ce contrôle, relisez le cours « Intégrales à paramètre » en maths spé puis entraînez-vous avec les **exercices corrigés** intégrales à paramètre.

Retrouvez tous les **contrôles de maths spé** classés par chapitre, ou choisissez un autre niveau sur la page contrôles de maths du CP au post-bac.