

Contrôle de maths spé : groupes monogènes, ordre d'un élément et $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

Fiche du contrôle

- **Niveau** : maths spé (MP)
- **Chapitre** : Compléments sur les groupes : groupes monogènes et ordre
- **Durée conseillée** : 2 heures
- **Barème** : sur 20 points (exercice 1 : 5 points ; exercice 2 : 4 points ; exercice 3 : 4 points ; exercice 4 : 3 points ; exercice 5 : 4 points)
- **Compétences évaluées** :
 - Raisonner : démontrer la classification des groupes monogènes à l'aide d'un morphisme issu de $\mathbb{Z}$
 - Calculer : déterminer l'ordre d'un élément et les générateurs de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ ou de U_n
 - Chercher : établir l'ordre d'un produit d'éléments qui commutent
 - Communiquer : rédiger une preuve du théorème de Lagrange dans le cas commutatif

Exercice 1 : Question de cours (5 points)

Calculatrice interdite.

Dans tout le sujet, un groupe est noté multiplicativement, d'élément neutre e , sauf mention contraire.

- a. Soit G un groupe monogène engendré par a . Démontrez que si G est infini, alors G est isomorphe à $(\mathbb{Z}, +)$, et que si G est fini de cardinal n , alors G est isomorphe à $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$. On pourra étudier l'application $\varphi : k \rightarrow a^k$ définie sur $\mathbb{Z}$. (3 points)
- b. Soit x un élément de G d'ordre fini d . Démontrez que, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on a $x^n = e$ si

et seulement si d divise n . (2 points)

Exercice 2 : Générateurs de $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$ et racines de l'unité (4 points)

Soit $n \geq 2$ un entier. On note $\bar{k}$ la classe de l'entier k dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, et $\mathbb{U}_n$ le groupe des racines n -ièmes de l'unité.

- Démontrez que $\bar{k}$ engendre le groupe $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$ si et seulement si $k \wedge n = 1$. (1,5 point)
- Donnez la liste des générateurs de $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$. Déterminez ensuite l'ordre de $\bar{8}$ et celui de $\bar{9}$ dans ce groupe. (1 point)
- Démontrez que $\mathbb{U}_n$ est cyclique et isomorphe à $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Déduisez-en la liste des générateurs de $\mathbb{U}_{12}$ sous forme exponentielle. (1,5 point)

Exercice 3 : Ordre d'un produit (4 points)

Soit G un groupe et x, y deux éléments de G qui commutent ($xy = yx$), d'ordres finis respectifs a et b , avec $a \wedge b = 1$.

- Montrez que $(xy)^{ab} = e$. (0,5 point)
- Montrez que $\langle x \rangle \cap \langle y \rangle = \{e\}$. (1,5 point)
- Déduisez-en que l'ordre de xy est exactement ab . (1,5 point)
- Application : dans le groupe $(\mathbb{C}^*, \times)$, déterminez l'ordre de $i e^{2i\pi/3}$ sans calcul de puissance. (0,5 point)

Exercice 4 : Sous-groupes de $(\mathbb{Z}, +)$ (3 points)

- a. Démontrez que tout sous-groupe H de $(\mathbb{Z}, +)$ est de la forme $n\mathbb{Z}$, avec $n \in \mathbb{N}$. (1,5 point)
- b. Soit a et b deux entiers non tous deux nuls. Vérifiez que $a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z}$ est un sous-groupe de $\mathbb{Z}$, puis montrez que $a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z} = (a \wedge b)\mathbb{Z}$. Donnez le résultat pour $12\mathbb{Z} + 18\mathbb{Z}$. (1 point)
- c. Déterminez l'entier $m \in \mathbb{N}$ tel que $12\mathbb{Z} \cap 18\mathbb{Z} = m\mathbb{Z}$. Justifiez. (0,5 point)

Exercice 5 : Groupes commutatifs finis et ordre premier (4 points)

Soit $(G, \cdot)$ un groupe **commutatif** fini de cardinal n , et $x \in G$.

- a. Montrez que l'application $\tau_x : g \rightarrow xg$ est une bijection de G sur G . (0,5 point)
- b. On pose $P = \prod_{g \in G} g$. En calculant de deux façons $\prod_{g \in G} (xg)$, montrez que $x^n = e$. (1,5 point)
- c. Déduisez-en que l'ordre de tout élément de G divise n . (0,5 point)
- d. On suppose que $n = p$ est un nombre premier. Montrez que G est cyclique, que tout élément $x \neq e$ l'engendre, et que G est isomorphe à $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. (1 point)
- e. Montrez qu'un groupe commutatif de cardinal 6 qui contient un élément d'ordre 2 et un élément d'ordre 3 est cyclique. (0,5 point)



Réviser avant le contrôle : groupes monogènes, ordre d'un élément et $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

Avant de faire ce contrôle, relisez le cours « [Groupes](#) » en maths spé puis entraînez-vous avec les **exercices corrigés** [groupes](#).

Retrouvez tous les [contrôles de maths spé classés par chapitre](#), ou choisissez un autre niveau sur la page [contrôles de maths du CP au post-bac](#).