Contrôle de maths spé : fonctions vectorielles, dérivation et Taylor

Fiche du contrôle

- **Niveau :** maths spé (MP)
- **Chapitre :** Fonctions vectorielles d'une variable réelle
- **Durée conseillée :** 2 heures
- **Barème :** sur 20 points (exercice 1 : 4 points ; exercice 2 : 5 points ; exercice 3 : 5 points ; exercice 4 : 6 points)
- **Compétences évaluées :**
  - Raisonner : démontrer la règle de dérivation d'une expression bilinéaire et la formule de Taylor
  - Calculer : dériver un déterminant colonne par colonne et une norme euclidienne au carré
  - Chercher : choisir un pas optimal pour majorer une dérivée à partir de la fonction et de sa dérivée seconde
  - Communiquer : justifier chaque passage d'une fonction réelle à une fonction à valeurs dans R^n

Exercice 1 : Question de cours : dérivée d'une expression bilinéaire (4 points)

Calculatrice interdite.

Soit E, F, G trois espaces vectoriels normés de dimension finie, $B : E \times F \to G$ une application bilinéaire, I un intervalle de $\mathbb{R}$, et $f : I \to E$, $g : I \to F$ deux fonctions dérivables sur I.

Téléchargé depuis https://mathovore.fr - Mathovore site de maths.

a. Énoncez et démontrez la formule donnant la dérivée de $t \to B\big(f(t), g(t)\big)$. On admettra que B est continue et qu'il existe $K \geq 0$ tel que $|B(x,y)| \leq K\,|x|\,|y|$. *(2,5 points)*

b. On munit $E = \mathbb{R}^n$ de son produit scalaire usuel et de la norme euclidienne associée. Déduisez-en la dérivée de $t \to \langle f(t), g(t) \rangle$, puis celle de $t \to |f(t)|^2$. Montrez que, si $|f|$ est constante sur I, alors $f'(t)$ est orthogonal à $f(t)$ pour tout t. *(1,5 point)*

Exercice 2 : Dérivée d'un déterminant (5 points)

Soit $M : I \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une fonction dérivable, de colonnes $C_1(t), \ldots, C_n(t)$.

a. À l'aide de la formule $\det M = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{j=1}^{n} m_{\sigma(j),j}$, montrez que $t \to \det M(t)$ est dérivable et que :

$$(\det M)'(t) = \sum_{j=1}^{n} \det\big(C_1(t), \ldots, C'_j(t), \ldots, C_n(t)\big).$$

(1,5 point)

b. On suppose $0 \in I$ et $M(0) = I_n$. Montrez que $(\det M)'(0) = \operatorname{tr} M'(0)$. *(1 point)*

c. On considère $M(t) = \begin{pmatrix} 1+t & t & 0 \\ t^2 & 1 & t \\ 0 & t & 1+2t \end{pmatrix}$. Calculez $\det M(t)$ sous forme développée, puis vérifiez le résultat de b). *(1,5 point)*

d. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrez que $\det(I_n + tA) = 1 + t \operatorname{tr} A + o(t)$ quand $t \to 0$. *(1 point)*

Exercice 3 : Accroissements finis et sommes de Riemann (5 points)

Dans cet exercice, $\mathbb{R}^n$ est muni de la norme euclidienne $\|\cdot\|$.

a. Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $|f'(t)| \leq M$ pour tout t. Démontrez que $|f(b) - f(a)| \leq M(b-a)$. *(1,5 point)*

b. Avec $f(t) = (\cos t, \sin t)$ sur $[0, 2\pi]$, montrez qu'il n'existe aucun $c \in]0, 2\pi[$ tel que $f(2\pi) - f(0) = 2\pi\ f'(c)$. *(1 point)*

c. Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}^n$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $f(0) = 0$ et $|f'(t)| \leq |f(t)|$ pour tout t. En étudiant $\varphi(t) = e^{-2t}|f(t)|^2$, montrez que f est la fonction nulle. *(1,5 point)*

d. Calculez la limite, quand $n \to +\infty$, du vecteur $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\cos\frac{k\pi}{n}, \sin\frac{k\pi}{n}\right)$. *(1 point)*

Exercice 4 : Formules de Taylor et inégalité de Landau (6 points)

Soit I un intervalle, $p \in \mathbb{N}$ et $f : I \to \mathbb{R}^n$ de classe $\mathcal{C}^{p+1}$, avec $\mathbb{R}^n$ muni de la norme euclidienne.

a. Énoncez et démontrez la formule de Taylor avec reste intégral à l'ordre p entre deux points a et b de I. *(2 points)*

b. Déduisez-en l'inégalité de Taylor-Lagrange : si $|f^{(p+1)}| \leq M_{p+1}$ sur I, majorez $\left\| f(b) - \sum_{k=0}^{p} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) \right\|$. *(1 point)*

c. Appliquez b) à $f(t) = (\cos t, \sin t)$ avec $p = 2$, $a = 0$ et $b = x$. Déduisez-en une majoration de $|\sin x - x|$. *(1,5 point)*

d. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ de classe $\mathcal{C}^2$ telle que $|f| \leq M_0$ et $|f''| \leq M_2$ sur $\mathbb{R}$, avec $M_2 > 0$. Montrez que, pour tous $x \in \mathbb{R}$ et $h > 0$, $|f'(x)| \leq \frac{2M_0}{h} + \frac{h\,M_2}{2}$. Déduisez-

Téléchargé depuis https://mathovore.fr - Mathovore site de maths.

en que $\left|f'(x)\right| \leq 2\sqrt{M_0 M_2}$. *(1,5 point)*

Réviser avant le contrôle : fonctions vectorielles, dérivation et Taylor

Avant de faire ce contrôle, relisez le cours « Fonctions vectorielles » en maths spé puis entraînez-vous avec les **exercices corrigés** fonctions vectorielles.

Retrouvez tous les **contrôles de maths spé** classés par chapitre, ou choisissez un autre niveau sur la page contrôles de maths du CP au post-bac.