

Contrôle de maths spé : fonctions génératrices et lois de sommes

Fiche du contrôle

- **Niveau** : maths spé (MP)
- **Chapitre** : Fonctions génératrices
- **Durée conseillée** : 3 heures
- **Barème** : sur 20 points (exercice 1 : 3 points ; exercice 2 : 5 points ; exercice 3 : 4 points ; exercice 4 : 8 points)
- **Compétences évaluées** :
 - Raisonner : démontrer que la fonction génératrice caractérise la loi et donne l'espérance
 - Calculer : fonctions génératrices des lois usuelles, espérance et variance par dérivation
 - Chercher : identifier la loi d'une somme, y compris d'un nombre aléatoire de termes
 - Modéliser : étudier une suite récurrente pour obtenir une probabilité d'extinction

Exercice 1 : Question de cours : la fonction génératrice caractérise la loi (3 points)

Calculatrice interdite. Documents interdits.

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$, définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

- Définissez la fonction génératrice G_X de X . Montrez que la série entière qui la définit a un rayon de convergence au moins égal à 1 et qu'elle converge normalement sur $[-1, 1]$. (1 point)
- Montrez que G_X caractérise la loi de X : si $G_X = G_Y$ sur $[-1, 1]$, alors X et Y ont même loi. (1 point)

- c. On suppose que le rayon de convergence de G_X est strictement supérieur à 1. Montrez que X admet une espérance et que $E(X) = G'_X(1)$. Rappelez, sans démonstration, l'énoncé général lorsque le rayon vaut 1. (1 point)

Exercice 2 : Fonctions génératrices des lois usuelles (5 points)

Soit $p \in]0, 1[$, $n, m \in \mathbb{N}^*$ et $\lambda, \mu > 0$.

- a. Calculez la fonction génératrice d'une variable de loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$, binomiale $\mathcal{B}(n, p)$, géométrique $\mathcal{G}(p)$ et de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$. Précisez à chaque fois le rayon de convergence. (2 points)
- b. On admet que si le rayon de G_X est strictement supérieur à 1, alors $E(X(X-1)) = G''_X(1)$. Établissez la formule $V(X) = G''_X(1) + G'_X(1) - G'_X(1)^2$ et appliquez-la à la loi $\mathcal{G}(p)$. (1,5 point)
- c. Soit X et Y indépendantes. À l'aide des fonctions génératrices, déterminez la loi de $X + Y$ lorsque $X \sim \mathcal{B}(n, p)$ et $Y \sim \mathcal{B}(m, p)$, puis lorsque $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$ et $Y \sim \mathcal{P}(\mu)$. (1,5 point)

Exercice 3 : Somme d'un nombre aléatoire de variables (4 points)

Soit N une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ et $(X_k)_{k \geq 1}$ une suite de variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$, de même loi que X_1 , telles que $N, X_1, X_2, \dots$ soient mutuellement indépendantes. On pose $S = \sum_{k=1}^N X_k$, avec la convention $S = 0$ si $N = 0$, et $S_n = X_1 + \dots + X_n$ pour $n \in \mathbb{N}$.

- a. Montrez que $G_S(t) = G_N(G_{X_1}(t))$ pour tout $t \in [-1, 1]$. Citez le théorème d'interversion des sommes utilisé. (1,5 point)

- b. On suppose que N et X_1 admettent une espérance. Montrez que S admet une espérance et que $E(S) = E(N) E(X_1)$. (1 point)
- c. Un pêcheur attrape un nombre N de poissons de loi $\mathcal{P}(\lambda)$; chaque poisson est, indépendamment, un brochet avec la probabilité p . Déterminez la loi du nombre de brochets pêchés. (1,5 point)

Exercice 4 : Problème : extinction d'une population de Galton-Watson (8 points)

Une population évolue par générations. À la génération 0, il y a un seul individu : $Z_0 = 1$. Chaque individu de la génération n a, indépendamment des autres, un nombre d'enfants de même loi qu'une variable X telle que

$$P(X = 0) = \frac{1}{4}, \quad P(X = 1) = \frac{1}{4}, \quad P(X = 2) = \frac{1}{2}.$$

On note Z_n l'effectif de la génération n et on admet que $Z_{n+1} = \sum_{i=1}^{Z_n} X_{n,i}$, où les $X_{n,i}$ ($i \geq 1$) ont la loi de X et où $Z_n, X_{n,1}, X_{n,2}, \dots$ sont mutuellement indépendantes. On note $G = G_X$, $m = E(X)$ et $u_n = P(Z_n = 0)$.

- a. Calculez $G(t)$ et m . À l'aide de l'exercice 3, montrez que $G_{Z_{n+1}} = G_{Z_n} \circ G$, puis que G_{Z_n} est la composée $G \circ G \circ \dots \circ G$ de n fonctions égales à G . (1 point)
- b. Montrez que $E(Z_n) = m^n$. (1 point)
- c. Justifiez que $u_n = G_{Z_n}(0)$ et que $u_{n+1} = G(u_n)$. Calculez u_1 et u_2 . (1,5 point)
- d. Déterminez les points fixes de G sur $[0, 1]$. Montrez que la suite (u_n) est croissante, majorée par $\frac{1}{2}$, et déterminez sa limite. (2 points)
- e. On appelle extinction l'événement « il existe n tel que $Z_n = 0$ ». Montrez que la probabilité d'extinction vaut $\frac{1}{2}$. (1 point)

- f. On remplace la loi de X par $P(X = 0) = \frac{1}{2}$, $P(X = 1) = \frac{1}{4}$, $P(X = 2) = \frac{1}{4}$.
Calculez la nouvelle valeur de m et montrez que l'extinction est presque sûre, de deux façons :
par les points fixes de la nouvelle fonction génératrice, puis par l'inégalité de Markov appliquée à Z_n . (1,5 point)



Réviser avant le contrôle : fonctions génératrices et lois de sommes

Avant de faire ce contrôle, relisez le cours [« Fonctions génératrices » en maths spé](#) puis entraînez-vous avec les **exercices corrigés** [fonctions génératrices](#).

Retrouvez tous les [contrôles de maths spé classés par chapitre](#), ou choisissez un autre niveau sur la page [contrôles de maths du CP au post-bac](#).