

## Contrôle de maths spé : extremums, hessienne et extremums liés

### Fiche du contrôle

- **Niveau** : maths spé (MP)
- **Chapitre** : Fonctions de classe  $C^k$  et optimisation
- **Durée conseillée** : 3 heures
- **Barème** : sur 20 points (exercice 1 : 4 points ; exercice 2 : 4 points ; exercice 3 : 3 points ; exercice 4 : 4 points ; exercice 5 : 5 points)
- **Compétences évaluées** :
  - Raisonner : démontrer la condition nécessaire d'extremum local en un point intérieur
  - Calculer : déterminer les points critiques et leur nature par la trace et le déterminant de la hessienne
  - Chercher : trouver un extremum global sur un compact en étudiant l'intérieur puis le bord
  - Modéliser : résoudre une équation aux dérivées partielles par un changement de variables linéaire

### Exercice 1 : Question de cours (4 points)

Calculatrice interdite.

Dans tout le sujet,  $U$  désigne un ouvert non vide de  $\mathbb{R}^n$  et  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ .

- Énoncez le théorème de Schwarz pour une fonction de classe  $C^2$  sur  $U$ . (1 point)
- On suppose  $f$  différentiable sur  $U$ . Démontrez que si  $f$  admet un extremum local en un point  $a \in U$ , alors  $df(a) = 0$ . On pourra étudier  $t \rightarrow f(a + tv)$  pour  $v \in \mathbb{R}^n$ . (1,5 point)

- c. Montrez par un exemple que la conclusion de b peut tomber en défaut pour un extremum atteint en un point d'une partie qui n'est pas ouverte. (0,5 point)
- d. On suppose  $n = 2$  et  $f$  de classe  $\mathcal{C}^2$  sur  $U$ . Énoncez la condition suffisante du second ordre en un point critique  $a$ , à l'aide de la trace et du déterminant de la matrice hessienne  $H_f(a)$ . (1 point)

### Exercice 2 : Points critiques et hessienne (4 points)

Soit  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  définie par  $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$ .

- a. Déterminez les points critiques de  $f$ . (1,5 point)
- b. Calculez la matrice hessienne de  $f$  et déterminez la nature de chaque point critique. (1,5 point)
- c. La fonction  $f$  admet-elle un extremum global sur  $\mathbb{R}^2$ ? (1 point)

### Exercice 3 : Équation des cordes vibrantes (3 points)

On cherche les fonctions  $f$  de classe  $\mathcal{C}^2$  sur  $\mathbb{R}^2$  telles que

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0. \quad (P)$$

On pose  $u = x + y$ ,  $v = x - y$ , et  $g$  définie sur  $\mathbb{R}^2$  par  $f(x, y) = g(x + y, x - y)$ .

- a. Justifiez que  $g$  est de classe  $\mathcal{C}^2$ , puis montrez que

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 4 \frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v}(x+y, x-y). \quad (1,5 \text{ point})$$

b. Déduisez-en les solutions de  $(P)$ . (1 point)

c. Déterminez la solution de  $(P)$  qui vérifie  $f(x, 0) = x^2$  et  $\frac{\partial f}{\partial y}(x, 0) = 0$  pour tout réel  $x$ . (0,5 point)

#### Exercice 4 : Extremums liés sur une ellipse (4 points)

Soit  $g(x, y) = \frac{x^2}{4} + y^2 - 1$ ,  $\Gamma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : g(x, y) = 0\}$  et  $f(x, y) = xy$ .  
On admet le théorème des extremums liés : si la restriction de  $f$  à  $\Gamma$  admet un extremum local en  $a \in \Gamma$  et si  $\nabla g(a) \neq 0$ , alors  $\nabla f(a)$  et  $\nabla g(a)$  sont colinéaires.

a. Montrez que  $f$  admet un maximum et un minimum sur  $\Gamma$ . (1 point)

b. Vérifiez que  $\nabla g$  ne s'annule pas sur  $\Gamma$ . (0,5 point)

c. Écrivez la condition de colinéarité de  $\nabla f$  et de  $\nabla g$ , et déterminez les points de  $\Gamma$  qui la vérifient. (1,5 point)

d. Donnez le maximum et le minimum de  $f$  sur  $\Gamma$ , ainsi que les points où ils sont atteints. (1 point)

#### Exercice 5 : Problème : extremums sur le disque fermé (5 points)

Soit  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$  le disque unité fermé et  $f(x, y) = x^2 + 2y^2 - x$ .

a. Justifiez que  $f$  admet un maximum et un minimum sur  $D$ . (0,5 point)

- b. Déterminez les points critiques de  $f$  dans l'intérieur de  $D$  et leur nature. (1 point)
- c. En paramétrant le cercle  $x^2 + y^2 = 1$  par  $x = \cos t$ ,  $y = \sin t$ , étudiez les valeurs de  $f$  sur le bord de  $D$ . (1,5 point)
- d. Concluez : donnez le maximum et le minimum de  $f$  sur  $D$  et les points où ils sont atteints. (1 point)
- e. Vérifiez qu'au point du bord où  $f$  est maximale d'ordonnée positive,  $\nabla f$  est colinéaire au gradient de  $(x, y) \rightarrow x^2 + y^2$ . Interprétez. (1 point)



## **Réviser avant le contrôle : extremums, hessienne et extremums liés**

---

Avant de faire ce contrôle, relisez le cours [« Optimisation » en maths spé](#) puis entraînez-vous avec les **exercices corrigés** [optimisation](#).

Retrouvez tous les [contrôles de maths spé classés par chapitre](#), ou choisissez un autre niveau sur la page [contrôles de maths du CP au post-bac](#).