Contrôle de maths spé : extremums, hessienne et extremums liés

Fiche du contrôle

- **Niveau :** maths spé (MP)
- **Chapitre :** Fonctions de classe C^k et optimisation
- **Durée conseillée :** 3 heures
- **Barème :** sur 20 points (exercice 1 : 4 points ; exercice 2 : 4 points ; exercice 3 : 3 points ; exercice 4 : 4 points ; exercice 5 : 5 points)
- **Compétences évaluées :**
  - Raisonner : démontrer la condition nécessaire d'extremum local en un point intérieur
  - Calculer : déterminer les points critiques et leur nature par la trace et le déterminant de la hessienne
  - Chercher : trouver un extremum global sur un compact en étudiant l'intérieur puis le bord
  - Modéliser : résoudre une équation aux dérivées partielles par un changement de variables linéaire

Exercice 1 : Question de cours (4 points)

Calculatrice interdite.

Dans tout le sujet, U désigne un ouvert non vide de $\mathbb{R}^n$ et $f : U \to \mathbb{R}$.

a. Énoncez le théorème de Schwarz pour une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur U. *(1 point)*

b. On suppose f différentiable sur U. Démontrez que si f admet un extremum local en un point $a \in U$, alors $df(a) = 0$. On pourra étudier $t \to f(a + tv)$ pour $v \in \mathbb{R}^n$. *(1,5 point)*

Téléchargé depuis https://mathovore.fr - Mathovore site de maths.

c. Montrez par un exemple que la conclusion de b peut tomber en défaut pour un extremum atteint en un point d'une partie qui n'est pas ouverte. *(0,5 point)*

d. On suppose $n = 2$ et f de classe $\mathcal{C}^2$ sur U. Énoncez la condition suffisante du second ordre en un point critique a, à l'aide de la trace et du déterminant de la matrice hessienne $H_f(a)$. *(1 point)*

Exercice 2 : Points critiques et hessienne (4 points)

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$.

a. Déterminez les points critiques de f. *(1,5 point)*

b. Calculez la matrice hessienne de f et déterminez la nature de chaque point critique. *(1,5 point)*

c. La fonction f admet-elle un extremum global sur $\mathbb{R}^2$? *(1 point)*

Exercice 3 : Équation des cordes vibrantes (3 points)

On cherche les fonctions f de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ telles que

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0. \quad (P)$$

On pose $u = x + y$, $v = x - y$, et g définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x, y) = g(x + y, x - y)$.

a. Justifiez que g est de classe $\mathcal{C}^2$, puis montrez que

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 4\,\frac{\partial^2 g}{\partial u\,\partial v}(x+y, x-y)$. *(1,5 point)*

b. Déduisez-en les solutions de (P). *(1 point)*

c. Déterminez la solution de (P) qui vérifie $f(x,0) = x^2$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x,0) = 0$ pour tout réel x. *(0,5 point)*

Exercice 4 : Extremums liés sur une ellipse (4 points)

Soit $g(x,y) = \frac{x^2}{4} + y^2 - 1$, $\Gamma = \left\{(x,y) \in athbbR^2 : g,g(x,y) = 0\right\}$ et $f(x,y) = xy$. On admet le théorème des extremums liés : si la restriction de f à Γ admet un extremum local en $a \in \Gamma$ et si $\nabla g(a) \neq 0$, alors $\nabla f(a)$ et $\nabla g(a)$ sont colinéaires.

a. Montrez que f admet un maximum et un minimum sur Γ . *(1 point)*

b. Vérifiez que ∇g ne s'annule pas sur Γ . *(0,5 point)*

c. Écrivez la condition de colinéarité de ∇f et de ∇g , et déterminez les points de Γ qui la vérifient. *(1,5 point)*

d. Donnez le maximum et le minimum de f sur Γ , ainsi que les points où ils sont atteints. *(1 point)*

Exercice 5 : Problème : extremums sur le disque fermé (5 points)

Soit $D = \left\{(x,y) \in [\mathbb{R}?]^2 : x,x^2 + y^2 \leq 1\right\}$ le disque unité fermé et $f(x,y) = x^2 + 2y^2 - x$.

a. Justifiez que f admet un maximum et un minimum sur D . *(0,5 point)*

Téléchargé depuis https://mathovore.fr - Mathovore site de maths.

b. Déterminez les points critiques de f dans l'intérieur de D et leur nature. *(1 point)*

c. En paramétrant le cercle $x^2 + y^2 = 1$ par $x = \cos t$, $y = \sin t$, étudiez les valeurs de f sur le bord de D . *(1,5 point)*

d. Concluez : donnez le maximum et le minimum de f sur D et les points où ils sont atteints. *(1 point)*

e. Vérifiez qu'au point du bord où f est maximale d'ordonnée positive, ∇f est colinéaire au gradient de $(x, y) \to x^2 + y^2$. Interprétez. *(1 point)*

Réviser avant le contrôle : extremums, hessienne et extremums liés

Avant de faire ce contrôle, relisez le cours « Optimisation » en maths spé puis entraînez-vous avec les **exercices corrigés** optimisation.

Retrouvez tous les **contrôles de maths spé** classés par chapitre, ou choisissez un autre niveau sur la page contrôles de maths du CP au post-bac.