# Contrôle de maths spé : exponentielle de matrice, systèmes linéaires

## Fiche du contrôle

- **Niveau :** maths spé (MP)
- **Chapitre :** Exponentielle de matrice et systèmes différentiels
- **Durée conseillée :** 2 heures 30
- **Barème :** sur 20 points (exercice 1 : 3 points ; exercice 2 : 5 points ; exercice 3 : 4 points ; exercice 4 : 8 points)
- **Compétences évaluées :**
  - Raisonner : démontrer la dérivabilité de t ↦ exp(tA) et la formule pour des matrices qui commutent
  - Calculer : obtenir l'exponentielle d'une matrice diagonalisable, nilpotente ou de la forme D + N
  - Modéliser : écrire la solution d'un problème de Cauchy à l'aide de exp(tA)
  - Communiquer : interpréter le comportement des solutions selon le signe des valeurs propres

## Exercice 1 : Question de cours : dérivation et exponentielle d'une somme (3 points)

*Calculatrice interdite.*

Dans tout le sujet, $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est muni d'une norme d'algèbre $|\cdot|$, c'est-à-dire telle que $|AB| \leq |A|\,|B|$ pour toutes matrices $A$ et $B$.

a. Rappelez la définition de $\exp(A)$ pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et justifiez la convergence de la série qui la définit. *(1 point)*

Téléchargé depuis https://mathovore.fr - Mathovore site de maths.

b. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Démontrez que $\varphi : t \to \exp(tA)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que $\varphi'(t) = A\exp(tA) = \exp(tA)\,A$. *(1 point)*

c. Soit $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telles que $AB = BA$. On admet que $B$ commute alors avec $\exp(tA)$ pour tout réel $t$. En comparant $t \to \exp\big(t(A+B)\big)$ et $t \to \exp(tA)\exp(tB)$, démontrez que $\exp(A+B) = \exp(A)\exp(B)$. Déduisez-en que $\exp(A)$ est inversible. *(1 point)*

## Exercice 2 : Calculs d'exponentielles (5 points)

a. Soit $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. Diagonalisez $A_1$ et calculez $\exp(A_1)$. *(1,5 point)*

b. Soit $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Calculez $N^2$ et $N^3$, puis $\exp(N)$. *(1 point)*

c. Soit $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Écrivez $B = 2\,I_3 + J$ avec $J$ nilpotente et calculez $\exp(tB)$ pour tout réel $t$, en justifiant chaque étape. *(1,5 point)*

d. Soit $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Calculez $\exp(C)$, $\exp(D)$ et $\exp(C+D)$. Que constatez-vous ? *(1 point)*

## Exercice 3 : Spectre et déterminant de exp(A) (4 points)

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On sait qu'il existe $P \in GL_n(\mathbb{C})$ et une matrice triangulaire supérieure $T$, de coefficients diagonaux $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, telles que $A = P\,T\,P^{-1}$.

a. Montrez que $\exp(A) = P\exp(T)\,P^{-1}$, puis que $\exp(T)$ est triangulaire supérieure de coefficients diagonaux $e^{\lambda_1}, \ldots, e^{\lambda_n}$. *(1,5 point)*

b. Déduisez-en que $\mathrm{Sp}\big(\exp(A)\big) = \big\{ e^{\lambda} : \lambda \in \mathrm{Sp}(A) \big\}$ et que $\det\big(\exp(A)\big) = e^{\mathrm{tr}(A)}$. *(1 point)*

c. Montrez que l'application $\exp : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to GL_n(\mathbb{R})$ n'est pas surjective. *(0,5 point)*

d. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ antisymétrique. Montrez que $\exp(A) \in SO_n(\mathbb{R})$ . *(1 point)*

## Exercice 4 : Problème : un système différentiel en dimension 3 (8 points)

On note $U$ la matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients valent $1$ , $u = (1,1,1)$ et

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = U - I_3.$$

On étudie le système différentiel $X' = AX$ , d'inconnue $X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$.

a. Calculez $U^2$ et déduisez-en que $A^2 = A + 2\,I_3$ . *(1 point)*

b. Montrez que $A$ est diagonalisable, de valeurs propres $2$ et $-1$, et déterminez ses sous-espaces propres. *(1,5 point)*

c. Montrez que, pour tout réel $t$ , $\exp(tA) = e^{-t}\,I_3 + \frac{e^{2t} - e^{-t}}{3}\,U$ . *(2 points)*

d. Déterminez la solution du système vérifiant $X(0) = (1,0,0)$ . *(1,5 point)*

e. Déterminez les conditions initiales $X(0) = (a,b,c)$ pour lesquelles la solution tend vers $0$ quand $t \to +\infty$ . Interprétez géométriquement cet ensemble. *(1 point)*

f. Résolvez le système $X' = AX + u$ avec la condition $X(0) = 0$ , en cherchant d'abord une solution constante. *(1 point)*

Téléchargé depuis https://mathovore.fr - Mathovore site de maths.

## Réviser avant le contrôle : exponentielle de matrice, systèmes linéaires

Avant de faire ce contrôle, relisez le cours « Systèmes différentiels linéaires » en maths spé puis entraînez-vous avec les **exercices corrigés** systèmes différentiels linéaires.

Retrouvez tous les **contrôles de maths spé** classés par chapitre, ou choisissez un autre niveau sur la page contrôles de maths du CP au post-bac.