

Contrôle de maths spé : exponentielle de matrice, systèmes linéaires

Fiche du contrôle

- **Niveau** : maths spé (MP)
- **Chapitre** : Exponentielle de matrice et systèmes différentiels
- **Durée conseillée** : 2 heures 30
- **Barème** : sur 20 points (exercice 1 : 3 points ; exercice 2 : 5 points ; exercice 3 : 4 points ; exercice 4 : 8 points)
- **Compétences évaluées** :
 - Raisonner : démontrer la dérivabilité de $t \mapsto \exp(tA)$ et la formule pour des matrices qui commutent
 - Calculer : obtenir l'exponentielle d'une matrice diagonalisable, nilpotente ou de la forme $D + N$
 - Modéliser : écrire la solution d'un problème de Cauchy à l'aide de $\exp(tA)$
 - Communiquer : interpréter le comportement des solutions selon le signe des valeurs propres

Exercice 1 : Question de cours : dérivation et exponentielle d'une somme (3 points)

Calculatrice interdite.

Dans tout le sujet, $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est muni d'une norme d'algèbre $\|\cdot\|$, c'est-à-dire telle que $\|AB\| \leq \|A\| \|B\|$ pour toutes matrices A et B .

- a. Rappelez la définition de $\exp(A)$ pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et justifiez la convergence de la série qui la définit. (1 point)

- b. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Démontrez que $\varphi : t \rightarrow \exp(tA)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que $\varphi'(t) = A \exp(tA) = \exp(tA) A$. (1 point)
- c. Soit $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telles que $AB = BA$. On admet que B commute alors avec $\exp(tA)$ pour tout réel t . En comparant $t \rightarrow \exp(t(A+B))$ et $t \rightarrow \exp(tA) \exp(tB)$, démontrez que $\exp(A+B) = \exp(A) \exp(B)$. Déduisez-en que $\exp(A)$ est inversible. (1 point)

Exercice 2 : Calculs d'exponentielles (5 points)

- a. Soit $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. Diagonalisez A_1 et calculez $\exp(A_1)$. (1,5 point)
- b. Soit $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Calculez N^2 et N^3 , puis $\exp(N)$. (1 point)
- c. Soit $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Écrivez $B = 2I_3 + J$ avec J nilpotente et calculez $\exp(tB)$ pour tout réel t , en justifiant chaque étape. (1,5 point)
- d. Soit $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Calculez $\exp(C)$, $\exp(D)$ et $\exp(C+D)$. Que constatez-vous ? (1 point)

Exercice 3 : Spectre et déterminant de $\exp(A)$ (4 points)

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On sait qu'il existe $P \in GL_n(\mathbb{C})$ et une matrice triangulaire supérieure T , de coefficients diagonaux $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, telles que $A = P T P^{-1}$.

- a. Montrez que $\exp(A) = P \exp(T) P^{-1}$, puis que $\exp(T)$ est triangulaire supérieure de coefficients diagonaux $e^{\lambda_1}, \dots, e^{\lambda_n}$. (1,5 point)
- b. Déduisez-en que $\text{Sp}(\exp(A)) = \{e^\lambda : \lambda \in \text{Sp}(A)\}$ et que $\det(\exp(A)) = e^{\text{tr}(A)}$. (1 point)

c. Montrez que l'application $\exp : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \rightarrow GL_n(\mathbb{R})$ n'est pas surjective. (0,5 point)

d. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ antisymétrique. Montrez que $\exp(A) \in SO_n(\mathbb{R})$. (1 point)

Exercice 4 : Problème : un système différentiel en dimension 3 (8 points)

On note U la matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients valent 1, $u = (1, 1, 1)$ et

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = U - I_3.$$

On étudie le système différentiel $X' = AX$, d'inconnue $X : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$.

a. Calculez U^2 et déduisez-en que $A^2 = A + 2I_3$. (1 point)

b. Montrez que A est diagonalisable, de valeurs propres 2 et -1 , et déterminez ses sous-espaces propres. (1,5 point)

c. Montrez que, pour tout réel t , $\exp(tA) = e^{-t}I_3 + \frac{e^{2t} - e^{-t}}{3}U$. (2 points)

d. Déterminez la solution du système vérifiant $X(0) = (1, 0, 0)$. (1,5 point)

e. Déterminez les conditions initiales $X(0) = (a, b, c)$ pour lesquelles la solution tend vers 0 quand $t \rightarrow +\infty$. Interprétez géométriquement cet ensemble. (1 point)

f. Résolvez le système $X' = AX + u$ avec la condition $X(0) = 0$, en cherchant d'abord une solution constante. (1 point)



Réviser avant le contrôle : exponentielle de matrice, systèmes linéaires

Avant de faire ce contrôle, relisez le cours « [Systèmes différentiels linéaires](#) » en maths spé puis entraînez-vous avec les **exercices corrigés** [systèmes différentiels linéaires](#).

Retrouvez tous les [contrôles de maths spé classés par chapitre](#), ou choisissez un autre niveau sur la page [contrôles de maths du CP au post-bac](#).