Contrôle de maths spé : espérance, variance, loi des grands nombres

Fiche du contrôle

- **Niveau :** maths spé (MP)
- **Chapitre :** Espérance, variance et loi faible des grands nombres
- **Durée conseillée :** 2 heures 30
- **Barème :** sur 20 points (exercice 1 : 4 points ; exercice 2 : 4 points ; exercice 3 : 4 points ; exercice 4 : 8 points)
- **Compétences évaluées :**
  - Raisonner : démontrer les inégalités de Markov et de Bienaymé-Tchebychev
  - Calculer : espérance et variance par séries entières et théorème de transfert
  - Chercher : utiliser la covariance pour la variance d'une somme de variables dépendantes
  - Modéliser : dimensionner un sondage à l'aide d'une inégalité de concentration

Exercice 1 : Question de cours : inégalités de Markov et de Bienaymé-Tchebychev (4 points)

Calculatrice interdite. Documents interdits.

Toutes les variables aléatoires sont discrètes, réelles, définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

a. Énoncez et démontrez l'inégalité de Markov. *(1,5 point)*

b. En déduire l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, que vous énoncerez précisément. *(1,5 point)*

Téléchargé depuis https://mathovore.fr - Mathovore site de maths.

c. Énoncez la loi faible des grands nombres. *(1 point)*

Exercice 2 : Espérance et variance des lois géométrique et de Poisson (4 points)

Soit $p \in]0,1[$, $\lambda > 0$, X une variable aléatoire de loi $\mathcal{G}(p)$ et Y une variable aléatoire de loi $\mathcal{P}(\lambda)$.

a. À l'aide de la série entière $\sum_{k \geq 0} x^k$ et de ses dérivées, montrez que X admet une espérance et une variance, et calculez $E(X)$ et $V(X)$. *(2 points)*

b. Montrez que Y admet une espérance et une variance, et calculez-les en passant par $E\big(Y(Y-1)\big)$. *(1 point)*

c. Justifiez l'existence de $E\left(\frac{1}{1+Y}\right)$ et calculez-la. *(1 point)*

Exercice 3 : L'espérance par les probabilités de queue (4 points)

a. Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$. Montrez que, dans $[0, +\infty]$, $E(X) = \sum_{n=1}^{+\infty} P(X \geq n)$, en citant le théorème d'interversion utilisé. En déduire que X admet une espérance si et seulement si cette série converge. *(1,5 point)*

b. On lance deux fois un dé équilibré à six faces et on note M le plus grand des deux résultats. Calculez $P(M \leq k)$ pour $k \in \{1,\ldots,6\}$, puis $E(M)$ à l'aide de a). *(1,5 point)*

c. Retrouvez l'espérance d'une variable de loi $\mathcal{G}(p)$ à l'aide de a). *(1 point)*

Exercice 4 : Problème : covariance, points fixes et sondage (8 points)

Partie A : points fixes d'une permutation aléatoire. Soit $n \geq 2$. On choisit une permutation σ de $\{1,\ldots,n\}$ selon la loi uniforme sur le groupe symétrique $\mathcal{S}_n$. Pour $i \in \{1,\ldots,n\}$, on note X_i la variable qui vaut 1 si $\sigma(i) = i$ et 0 sinon, et $S = X_1 + \ldots + X_n$ le nombre de points fixes de σ.

a. Déterminez la loi de X_i et son espérance. *(1 point)*

b. Pour $i \neq j$, calculez $E(X_i X_j)$ puis $\mathrm{Cov}(X_i, X_j)$. Les variables X_i et X_j sont-elles indépendantes ? *(1,5 point)*

c. Calculez $E(S)$ et $V(S)$. *(1,5 point)*

Partie B : taille d'un sondage. Dans une grande population, une proportion inconnue $p \in]0,1[$ de personnes est favorable à un projet. On interroge n personnes et on modélise leurs réponses par des variables $Y_1,\ldots,Y_n$ indépendantes de loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$. On pose $F_n = \frac{Y_1 + \ldots + Y_n}{n}$.

d. Calculez $E(F_n)$ et $V(F_n)$. *(1 point)*

e. Montrez que $p(1-p) \leq \frac{1}{4}$, puis que $P(|F_n - p| \geq \varepsilon) \leq \frac{1}{4n\varepsilon^2}$ pour tout $\varepsilon > 0$. Quel résultat du cours retrouve-t-on quand $n \to +\infty$? *(1,5 point)*

f. Déterminez le plus petit entier n pour lequel cette majoration garantit $P(|F_n - p| \geq 0{,}02) \leq 0{,}05$. Que devient-il si l'on se contente d'une précision de $0{,}04$? *(1,5 point)*

Téléchargé depuis https://mathovore.fr - Mathovore site de maths.

Réviser avant le contrôle : espérance, variance, loi des grands nombres

Avant de faire ce contrôle, relisez le cours « Espérance et variance » en maths spé puis entraînez-vous avec les **exercices corrigés** espérance et variance.

Retrouvez tous les **contrôles de maths spé** classés par chapitre, ou choisissez un autre niveau sur la page contrôles de maths du CP au post-bac.