

Contrôle de maths spé : espaces probabilisés et variables discrètes

Fiche du contrôle

- **Niveau** : maths spé (MP)
- **Chapitres** : Ensembles dénombrables et espaces probabilisés + Variables aléatoires discrètes et lois usuelles
- **Durée conseillée** : 2 heures 30
- **Barème** : sur 20 points (exercice 1 : 3 points ; exercice 2 : 4 points ; exercice 3 : 5 points ; exercice 4 : 8 points)
- **Compétences évaluées** :
 - Raisonner : démontrer la dénombrabilité d'un ensemble et le théorème de continuité croissante
 - Modéliser : traduire une expérience infinie par des unions et intersections d'événements
 - Calculer : déterminer la loi d'un minimum, d'une somme et les lois marginales d'un couple
 - Communiquer : justifier l'indépendance et citer la formule des probabilités totales

Exercice 1 : Question de cours : dénombrabilité et continuité monotone (3 points)

Calculatrice interdite. Documents interdits.

- a. Rappelez la définition d'un ensemble dénombrable. Montrez que l'application $\varphi : \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}^*$, $(p, q) \rightarrow 2^p(2q + 1)$ est bijective et en déduire que $\mathbb{N}^2$ est dénombrable. (1 point)
- b. En déduire que $\mathbb{Q}$ est dénombrable. On pourra utiliser sans démonstration qu'un produit de deux ensembles dénombrables est dénombrable et que l'image d'un ensemble dénombrable par une application est finie ou dénombrable. (0,5 point)

- c. Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé et $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite croissante d'événements. Énoncez et démontrez le théorème de continuité croissante. (1,5 point)

Exercice 2 : Pile ou face infini (4 points)

On lance indéfiniment une pièce qui donne pile avec la probabilité $p \in]0, 1[$, les lancers étant mutuellement indépendants. Pour $k \in \mathbb{N}^*$, on note P_k l'événement « le k -ième lancer donne pile » et F_k son contraire. On admet l'existence d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ modélisant cette expérience.

- Montrez que l'événement « on n'obtient jamais pile » est négligeable. (1 point)
- Écrivez l'événement « on obtient pile une infinité de fois » à l'aide des P_k , d'unions et d'intersections, puis montrez qu'il est presque sûr. (1,5 point)
- On note T le rang du premier pile (défini sur l'événement presque sûr « on obtient au moins un pile »). Déterminez la loi de T et vérifiez que la somme des probabilités vaut 1. (1,5 point)

Exercice 3 : Loi géométrique, absence de mémoire et minimum (5 points)

Soit $p, q \in]0, 1[$, X et Y deux variables aléatoires indépendantes, de lois géométriques respectives $\mathcal{G}(p)$ et $\mathcal{G}(q)$: $P(X = k) = p(1 - p)^{k-1}$ pour $k \in \mathbb{N}^*$.

- Calculez $P(X > n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. (1 point)
- Montrez que $P(X > n + k \mid X > n) = P(X > k)$ pour tous $n, k \in \mathbb{N}$ (absence de mémoire). (1 point)
- Réciproquement, soit W une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ telle que $P(W > n) > 0$ et $P(W > n + k \mid W > n) = P(W > k)$ pour tous $n, k \in \mathbb{N}$. Montrez que W suit une loi géométrique dont vous préciserez le paramètre. (1,5 point)

- d. On pose $Z = \min(X, Y)$. Calculez $P(Z > n)$ et en déduire que Z suit une loi géométrique de paramètre $p + q - pq$. (1,5 point)

Exercice 4 : Problème : lois de Poisson et clients d'un magasin (8 points)

Partie A. Soit $\lambda, \mu > 0$ et X, Y deux variables aléatoires indépendantes de lois de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$ et $\mathcal{P}(\mu)$.

- Déterminez la loi de $X + Y$. (1,5 point)
- Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminez la loi conditionnelle de X sachant $(X + Y = n)$ et reconnaissez une loi usuelle. (1,5 point)

Partie B. Le nombre N de clients qui entrent un jour donné dans un magasin suit la loi $\mathcal{P}(\lambda)$. Chaque client fait un achat avec la probabilité $p \in]0, 1[$, indépendamment des autres. On note S le nombre de clients qui achètent et $R = N - S$ le nombre de ceux qui n'achètent rien. Le modèle se traduit par : pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $k \in \{0, 1, \dots, n\}$,

$$P(S = k | N = n) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}.$$

- Donnez la loi du couple (N, S) . (1 point)
- Déterminez la loi marginale de S . (1,5 point)
- Calculez $P(S = k, R = j)$ pour $(k, j) \in \mathbb{N}^2$. En déduire la loi de R et montrez que S et R sont indépendantes. (1,5 point)
- Soit $k \in \mathbb{N}$. Sachant que k clients ont acheté, déterminez la loi conditionnelle de $N - k$, c'est-à-dire $P(N = k + j | S = k)$ pour $j \in \mathbb{N}$. Commentez. (1 point)



Réviser avant le contrôle : espaces probabilisés et variables discrètes

Avant de faire ce contrôle, relisez le cours « [Espaces probabilisés](#) » en maths spé et « [Variables aléatoires discrètes](#) » en maths spé puis entraînez-vous avec les **exercices corrigés** [espaces probabilisés](#), [variables aléatoires discrètes](#).

Retrouvez tous les [contrôles de maths spé classés par chapitre](#), ou choisissez un autre niveau sur la page [contrôles de maths du CP au post-bac](#).