

Contrôle de maths spé : équations différentielles linéaires

Fiche du contrôle

- **Niveau** : maths spé (MP)
- **Chapitre** : Équations différentielles linéaires
- **Durée conseillée** : 3 heures
- **Barème** : sur 20 points (exercice 1 : 3 points ; exercice 2 : 4 points ; exercice 3 : 4 points ; exercice 4 : 4 points ; exercice 5 : 5 points)
- **Compétences évaluées** :
 - Raisonner : démontrer que l'espace des solutions homogènes est de dimension n
 - Calculer : obtenir une seconde solution par le wronskien et appliquer la variation des constantes
 - Chercher : trouver les solutions développables en série entière d'une équation à point singulier
 - Communiquer : mener une analyse-synthèse pour raccorder des solutions en un point singulier

Exercice 1 : Question de cours : théorème de Cauchy linéaire (3 points)

Calculatrice interdite.

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, $n \geq 1$, et $A : I \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $B : I \rightarrow \mathbb{K}^n$ deux applications continues. On considère le système différentiel $(S) : X' = A(t)X + B(t)$ et le système homogène associé $(H) : X' = A(t)X$.

- a. Énoncez le théorème de Cauchy linéaire pour (S) . (1 point)

- b. Soit $t_0 \in I$. Montrez que l'ensemble $\mathcal{S}_H$ des solutions de (H) sur I est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^1(I, \mathbb{K}^n)$ et que l'application $\varphi: X \rightarrow X(t_0)$ est un isomorphisme de $\mathcal{S}_H$ sur $\mathbb{K}^n$. Donnez la dimension de $\mathcal{S}_H$. (1,5 point)
- c. Soit $a, b: I \rightarrow \mathbb{K}$ continues. En écrivant l'équation $y'' + a(t)y' + b(t)y = 0$ sous forme d'un système, déduisez-en la dimension de son espace de solutions sur I . (0,5 point)

Exercice 2 : Wronskien et deuxième solution (4 points)

On considère, sur l'intervalle $I =]0, +\infty[$, l'équation

$$(E_2): t y'' - (t + 1) y' + y = 0.$$

Pour deux solutions y_1 et y_2 de (E_2) sur I , on note $W = y_1 y_2' - y_1' y_2$ leur wronskien.

- a. Vérifiez que $y_1: t \rightarrow e^t$ est solution de (E_2) sur I . (0,5 point)
- b. Montrez que W vérifie $W'(t) = \left(1 + \frac{1}{t}\right) W(t)$ sur I , puis que $W(t) = K t e^t$ pour une constante K . (1 point)
- c. En calculant la dérivée de $\frac{y_2}{y_1}$, déterminez une solution y_2 de (E_2) sur I dont le wronskien avec y_1 vaut $-t e^t$. (1,5 point)
- d. Justifiez que (y_1, y_2) est une base de l'espace des solutions sur I , puis déterminez la solution de (E_2) telle que $y(1) = 0$ et $y'(1) = 1$. (1 point)

Exercice 3 : Variation des constantes (4 points)

On se place sur $J =]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ et on considère l'équation

$$(E_3) : y'' + y = \frac{1}{\cos t}.$$

- Résolvez l'équation homogène associée sur J . (0,5 point)
- Par la méthode de variation des constantes, cherchez une solution particulière de la forme $y = \lambda(t) \cos t + \mu(t) \sin t$, avec $\lambda'(t) \cos t + \mu'(t) \sin t = 0$. Écrivez le système vérifié par λ' et μ' , puis résolvez-le. (2 points)
- Donnez l'ensemble des solutions de (E_3) sur J . (0,5 point)
- Justifiez l'existence et l'unicité d'une solution vérifiant $y(0) = 0$ et $y'(0) = 0$, puis déterminez-la. (1 point)

Exercice 4 : Solutions développables en série entière (4 points)

On considère l'équation

$$(E_4) : 4x y'' + 2 y' - y = 0.$$

- On cherche les fonctions $f : x \rightarrow \sum_{n \geq 0} a_n x^n$, de rayon de convergence $R > 0$, solutions de (E_4) sur $] -R, R[$. Établissez une relation de récurrence entre a_{n+1} et a_n , exprimez a_n en fonction de a_0 et de n , puis déterminez R . (1,5 point)
- Exprimez la somme f obtenue pour $a_0 = 1$ à l'aide de fonctions usuelles, sur $]0, +\infty[$ puis sur $] -\infty, 0[$. (0,5 point)
- Vérifiez que $g : x \rightarrow \operatorname{sh}(\sqrt{x})$ est solution de (E_4) sur $]0, +\infty[$. Déduisez-en toutes les solutions de (E_4) sur $]0, +\infty[$, en justifiant la dimension de l'espace des solutions. (1 point)

- d. Déterminez les solutions y de (E_4) sur $]0, +\infty[$ telles que y' admette une limite finie en 0^+ . Comparez avec la question a. (1 point)

Exercice 5 : Problème : équations non normalisées et raccordements (5 points)

Une équation $\alpha(x) y' + \beta(x) y = \gamma(x)$ est dite non normalisée lorsque α s'annule. On appelle solution sur $\mathbb{R}$ toute fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ qui vérifie l'équation en tout point de $\mathbb{R}$.

Partie A. On étudie $(E_5): x y' - 2y = x^3$.

- a. Résolvez (E_5) sur $]0, +\infty[$, puis sur $] -\infty, 0[$. (1 point)
- b. Déterminez toutes les solutions de (E_5) sur $\mathbb{R}$. (1,5 point)
- c. Quelle est la dimension de la direction de l'espace affine des solutions sur $\mathbb{R}$? Expliquez pourquoi ce résultat ne contredit pas le théorème de Cauchy linéaire. Combien de solutions sur $\mathbb{R}$ vérifient $y(0) = 0$? et $y(0) = 1$? Déterminez la solution telle que $y(1) = 2$ et $y(-1) = 0$. (1 point)
- d. Parmi les solutions sur $\mathbb{R}$, lesquelles sont de classe $\mathcal{C}^2$? (0,5 point)

Partie B. On étudie $(F): x y' + y = 2x$.

- e. Résolvez (F) sur $]0, +\infty[$ et sur $] -\infty, 0[$, puis montrez que (F) admet une unique solution sur $\mathbb{R}$, que vous préciserez. (1 point)



Réviser avant le contrôle : équations différentielles linéaires

Avant de faire ce contrôle, relisez le cours « [Équations différentielles linéaires](#) » en maths spé puis entraînez-vous avec les **exercices corrigés** [équations différentielles linéaires](#).

Retrouvez tous les [contrôles de maths spé classés par chapitre](#), ou choisissez un autre niveau sur la page [contrôles de maths du CP au post-bac](#).