Contrôle de maths spé : équations différentielles linéaires

Fiche du contrôle

- **Niveau :** maths spé (MP)
- **Chapitre :** Équations différentielles linéaires
- **Durée conseillée :** 3 heures
- **Barème :** sur 20 points (exercice 1 : 3 points ; exercice 2 : 4 points ; exercice 3 : 4 points ; exercice 4 : 4 points ; exercice 5 : 5 points)
- **Compétences évaluées :**
  - Raisonner : démontrer que l'espace des solutions homogènes est de dimension n
  - Calculer : obtenir une seconde solution par le wronskien et appliquer la variation des constantes
  - Chercher : trouver les solutions développables en série entière d'une équation à point singulier
  - Communiquer : mener une analyse-synthèse pour raccorder des solutions en un point singulier

Exercice 1 : Question de cours : théorème de Cauchy linéaire (3 points)

Calculatrice interdite.

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, $n \geq 1$, et $A : I \to \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $B : I \to \mathbb{K}^n$ deux applications continues. On considère le système différentiel $(S) : X' = A(t)\,X + B(t)$ et le système homogène associé $(H) : X' = A(t)\,X$.

a. Énoncez le théorème de Cauchy linéaire pour (S). *(1 point)*

Téléchargé depuis https://mathovore.fr - Mathovore site de maths.

b. Soit $t_0 \in I$. Montrez que l'ensemble $\mathcal{S}_H$ des solutions de (H) sur I est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^1(I, \mathbb{K}^n)$ et que l'application $\varphi : X \to X(t_0)$ est un isomorphisme de $\mathcal{S}_H$ sur $\mathbb{K}^n$. Donnez la dimension de $\mathcal{S}_H$. *(1,5 point)*

c. Soit $a, b : I \to \mathbb{K}$ continues. En écrivant l'équation $y'' + a(t)\,y' + b(t)\,y = 0$ sous forme d'un système, déduisez-en la dimension de son espace de solutions sur I. *(0,5 point)*

Exercice 2 : Wronskien et deuxième solution (4 points)

On considère, sur l'intervalle $I =]0, +\infty[$, l'équation

$$(E_2) : \; t\,y'' - (t+1)\,y' + y = 0.$$

Pour deux solutions y_1 et y_2 de (E_2) sur I, on note $W = y_1\,y_2' - y_1'\,y_2$ leur wronskien.

a. Vérifiez que $y_1 : t \to e^t$ est solution de (E_2) sur I. *(0,5 point)*

b. Montrez que W vérifie $W'(t) = \left(1 + \frac{1}{t}\right) W(t)$ sur I, puis que $W(t) = K\,t\,e^t$ pour une constante K. *(1 point)*

c. En calculant la dérivée de $\frac{y_2}{y_1}$, déterminez une solution y_2 de (E_2) sur I dont le wronskien avec y_1 vaut $-t\,e^t$. *(1,5 point)*

d. Justifiez que (y_1, y_2) est une base de l'espace des solutions sur I, puis déterminez la solution de (E_2) telle que $y(1) = 0$ et $y'(1) = 1$. *(1 point)*

Exercice 3 : Variation des constantes (4 points)

On se place sur $J = \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ et on considère l'équation

$$(E_3) : \ y'' + y = \frac{1}{\cos t}.$$

a. Résolvez l'équation homogène associée sur J. *(0,5 point)*

b. Par la méthode de variation des constantes, cherchez une solution particulière de la forme $y = \lambda(t)\cos t + \mu(t)\sin t$, avec $\lambda'(t)\cos t + \mu'(t)\sin t = 0$. Écrivez le système vérifié par λ' et μ', puis résolvez-le. *(2 points)*

c. Donnez l'ensemble des solutions de (E_3) sur J. *(0,5 point)*

d. Justifiez l'existence et l'unicité d'une solution vérifiant $y(0) = 0$ et $y'(0) = 0$, puis déterminez-la. *(1 point)*

Exercice 4 : Solutions développables en série entière (4 points)

On considère l'équation

$$(E_4) : \ 4x\ y'' + 2\ y' - y = 0.$$

a. On cherche les fonctions $f : x \to \sum_{n \geq 0} a_n x^n$, de rayon de convergence $R > 0$, solutions de (E_4) sur $]-R, R[$. Établissez une relation de récurrence entre a_{n+1} et a_n, exprimez a_n en fonction de a_0 et de n, puis déterminez R. *(1,5 point)*

b. Exprimez la somme f obtenue pour $a_0 = 1$ à l'aide de fonctions usuelles, sur $]0, +\infty[$ puis sur $]-\infty, 0[$. *(0,5 point)*

c. Vérifiez que $g : x \to \mathrm{sh}(\sqrt{x})$ est solution de (E_4) sur $]0, +\infty[$. Déduisez-en toutes les solutions de (E_4) sur $]0, +\infty[$, en justifiant la dimension de l'espace des solutions. *(1 point)*

Téléchargé depuis https://mathovore.fr - Mathovore site de maths.

d. Déterminez les solutions y de (E_4) sur $]0, +\infty[$ telles que y' admette une limite finie en 0^+. Comparez avec la question a. *(1 point)*

Exercice 5 : Problème : équations non normalisées et raccordements (5 points)

Une équation $\alpha(x)\, y' + \beta(x)\, y = \gamma(x)$ est dite non normalisée lorsque α s'annule. On appelle solution sur $\mathbb{R}$ toute fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ qui vérifie l'équation en tout point de $\mathbb{R}$.

Partie A. On étudie $(E_5) : x\ y' - 2y = x^3$.

a. Résolvez (E_5) sur $]0, +\infty[$, puis sur $]-\infty, 0[$. *(1 point)*

b. Déterminez toutes les solutions de (E_5) sur $\mathbb{R}$. *(1,5 point)*

c. Quelle est la dimension de la direction de l'espace affine des solutions sur $\mathbb{R}$? Expliquez pourquoi ce résultat ne contredit pas le théorème de Cauchy linéaire. Combien de solutions sur $\mathbb{R}$ vérifient $y(0) = 0$? et $y(0) = 1$? Déterminez la solution telle que $y(1) = 2$ et $y(-1) = 0$. *(1 point)*

d. Parmi les solutions sur $\mathbb{R}$, lesquelles sont de classe $\mathcal{C}^2$? *(0,5 point)*

Partie B. On étudie $(F) : x\ y' + y = 2x$.

e. Résolvez (F) sur $]0, +\infty[$ et sur $]-\infty, 0[$, puis montrez que (F) admet une unique solution sur $\mathbb{R}$, que vous préciserez. *(1 point)*

Réviser avant le contrôle : équations différentielles linéaires

Avant de faire ce contrôle, relisez le cours « Équations différentielles linéaires » en maths spé puis entraînez-vous avec les **exercices corrigés** équations différentielles linéaires.

Retrouvez tous les **contrôles de maths spé** classés par chapitre, ou choisissez un autre niveau sur la page contrôles de maths du CP au post-bac.

Téléchargé depuis https://mathovore.fr - Mathovore site de maths.