

Contrôle de maths spé : éléments propres et polynôme caractéristique

Fiche du contrôle

- **Niveau** : maths spé (MP)
- **Chapitre** : Éléments propres et polynôme caractéristique
- **Durée conseillée** : 2 heures
- **Barème** : sur 20 points (exercice 1 : 4 points ; exercice 2 : 5 points ; exercice 3 : 4 points ; exercice 4 : 3 points ; exercice 5 : 4 points)
- **Compétences évaluées** :
 - Raisonner : démontrer que des sous-espaces propres sont en somme directe
 - Calculer : obtenir un polynôme caractéristique et un spectre selon un paramètre
 - Représenter : exploiter une matrice triangulaire par blocs associée à un sous-espace stable
 - Chercher : utiliser la commutation pour trouver des sous-espaces stables

Exercice 1 : Question de cours (4 points)

Calculatrice interdite.

Dans tout le sujet, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, E est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$, et le polynôme caractéristique d'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est $\chi_A = \det(XI_n - A)$.

- Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ des valeurs propres de u deux à deux distinctes. Démontrez que la somme $E_{\lambda_1}(u) + \dots + E_{\lambda_p}(u)$ est directe. (2 points)
- Démontrez que χ_A est un polynôme unitaire de degré n , dont le coefficient de X^{n-1} vaut

$-\text{tr}(A)$ et le coefficient constant vaut $(-1)^n \det(A)$. (2 points)

Exercice 2 : Spectre d'une matrice à paramètre (5 points)

Pour $m \in \mathbb{R}$, on pose $A_m = \begin{pmatrix} 1 & 0 & m \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

- Calculez le polynôme caractéristique de A_m sous forme factorisée. (1 point)
- Selon la valeur de m , déterminez le spectre réel de A_m et la multiplicité de chaque valeur propre. (1,5 point)
- On prend $m = 1$. Déterminez une base de chaque sous-espace propre de A_1 . (1,5 point)
- On prend $m = -4$. Déterminez le spectre complexe de A_{-4} et un vecteur propre associé à la valeur propre de partie imaginaire strictement positive. (1 point)

Exercice 3 : Matrices triangulaires par blocs (4 points)

- Soit $M = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix}$ avec $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ et $D \in \mathcal{M}_q(\mathbb{K})$. En admettant que $\det M = \det A \times \det D$, montrez que $\chi_M = \chi_A \chi_D$. (0,5 point)
- Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et F un sous-espace de E stable par u , non réduit à $\{0\}$. Montrez que le polynôme caractéristique de l'endomorphisme induit u_F divise χ_u . (1 point)
- Déterminez le polynôme caractéristique et le spectre de

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & 7 \\ 3 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

(1,5 point)

- d. Trouvez un vecteur propre de M associé à la valeur propre 4. (1 point)

Exercice 4 : Endomorphismes qui commutent (3 points)

Soit u et v deux endomorphismes de E tels que $u \circ v = v \circ u$.

- a. Montrez que $\ker u$, $\operatorname{Im} u$ et chaque sous-espace propre $E_\lambda(u)$ sont stables par v . (1 point)
- b. On suppose que u possède n valeurs propres distinctes. Montrez que tout vecteur propre de u est aussi un vecteur propre de v . (1 point)
- c. Déterminez toutes les matrices $B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{K})$ qui commutent avec $D = \operatorname{diag}(1, 2, 3)$. (1 point)

Exercice 5 : Polynômes caractéristiques de AB et BA (4 points)

Soit A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

- a. On suppose A inversible. Vérifiez que $AB = A(BA)A^{-1}$, puis déduisez-en que $X_{AB} = X_{BA}$. (1 point)
- b. Sans hypothèse sur A , montrez que AB et BA ont les mêmes valeurs propres non nulles. (1 point)
- c. Montrez que 0 est valeur propre de AB si et seulement si 0 est valeur propre de BA . (0,5 point)
- d. On prend $n = 2$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Calculez AB

et BA , leurs polynômes caractéristiques et la dimension de leurs sous-espaces propres. Les matrices AB et BA sont-elles semblables ? (1 point)

e. Déduisez de a) que $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$ lorsque A est inversible. (0,5 point)



Réviser avant le contrôle : éléments propres et polynôme caractéristique

Avant de faire ce contrôle, relisez le cours [« Éléments propres » en maths spé](#) puis entraînez-vous avec les **exercices corrigés** [éléments propres](#).

Retrouvez tous les [contrôles de maths spé classés par chapitre](#), ou choisissez un autre niveau sur la page [contrôles de maths du CP au post-bac](#).

Autres contrôles de maths spé sur ce thème

- [Contrôle de maths spé : DS de réduction des endomorphismes](#)