

Contrôle de maths spé : DS de réduction des endomorphismes

Fiche du contrôle

- **Niveau** : maths spé (MP)
- **Chapitres** : Éléments propres et polynôme caractéristique + Diagonalisation, trigonalisation et nilpotence + Polynômes d'endomorphismes et Cayley-Hamilton
- **Durée conseillée** : 4 heures
- **Barème** : sur 20 points (exercice 1 : 5 points ; exercice 2 : 5 points ; exercice 3 : 5 points ; exercice 4 : 5 points)
- **Compétences évaluées** :
 - Calculer : polynôme caractéristique, sous-espaces propres et puissances d'une matrice
 - Raisonner : relier polynômes annulateurs, polynôme minimal et diagonalisabilité
 - Représenter : choisir une base adaptée et écrire une matrice par blocs
 - Communiquer : rédiger une démonstration complète en citant les théorèmes de réduction

Notations. Dans tout le problème, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et $n \geq 2$ est un entier. Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on note $\chi_A = \det(X I_n - A)$ son polynôme caractéristique, μ_A son polynôme minimal, et $(e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{K}^n$, identifié à $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.

Soit $P = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \dots + a_1X + a_0$ un polynôme unitaire de $\mathbb{K}[X]$. Sa **matrice compagnon** est :

$$C_P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & \dots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \dots & \dots & 0 & -a_{n-2} \\ 0 & \dots & 0 & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}.$$

Ainsi $C_P e_k = e_{k+1}$ pour $1 \leq k \leq n-1$, et la dernière colonne de C_P contient $-a_0, \dots, -a_{n-1}$. Les quatre parties se suivent ; vous pouvez admettre le résultat d'une question pour traiter les suivantes.

Exercice 1 : Partie I : polynôme caractéristique d'une matrice compagnon (5 points)

Calculatrice interdite. Documents interdits.

- En effectuant l'opération $L_1 \leftarrow L_1 + X L_2 + X^2 L_3 + \dots + X^{n-1} L_n$ sur la matrice $X I_n - C_P$, démontrez que $\chi_{C_P} = P$. (1,5 point)
- Soit λ une valeur propre de C_P . Démontrez que le rang de $C_P - \lambda I_n$ vaut $n-1$, puis que le vecteur $V_\lambda = (1, \lambda, \lambda^2, \dots, \lambda^{n-1})^T$ est un vecteur propre de la transposée C_P^T . (1,5 point)
- Déduisez-en que C_P est diagonalisable si et seulement si P est scindé à racines simples sur $\mathbb{K}$. (1 point)
- Calculez $C_P^k e_1$ pour $0 \leq k \leq n-1$. Démontrez qu'aucun polynôme non nul de degré au plus $n-1$ n'annule C_P , puis que $\mu_{C_P} = \chi_{C_P} = P$. (1 point)

Exercice 2 : Partie II : trigonalisation d'un exemple (5 points)

Dans cette partie, $n = 3$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et $P = (X-1)^2(X-2)$. On note $C = C_P$.

a. Développez P et écrivez la matrice C . Justifiez, sans calcul supplémentaire, que C n'est pas diagonalisable. (1 point)

b. Déterminez une matrice $Q \in GL_3(\mathbb{R})$ telle que

$$Q^{-1} C Q = T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Vous chercherez les colonnes v_1, v_2, v_3 de Q en traduisant l'égalité $CQ = QT$. (2 points)

c. Soit $k \in \mathbb{N}$. Déterminez le reste R_k de la division euclidienne de X^k par P , puis exprimez C^k comme combinaison linéaire de I_3 , $C - I_3$ et $(C - I_3)^2$. Justifiez le passage du polynôme à la matrice. (2 points)

Exercice 3 : Partie III : l'endomorphisme de multiplication à gauche (5 points)

On revient au cas général. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On définit $\varphi_A : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ par $\varphi_A(M) = AM$. On admet que φ_A est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

a. Démontrez que, pour tout $Q \in \mathbb{K}[X]$ et toute matrice M , $Q(\varphi_A)(M) = Q(A)M$. Déduisez-en que φ_A et A ont les mêmes polynômes annulateurs, donc le même polynôme minimal. (1,5 point)

b. Déduisez-en que φ_A est diagonalisable si et seulement si A l'est. (1 point)

c. Démontrez que φ_A et A ont le même spectre. Pour λ valeur propre, décrivez le sous-espace propre de φ_A associé à λ à l'aide des colonnes de M , et donnez sa dimension en fonction de $\dim \ker(A - \lambda I_n)$. (1,5 point)

d. On note E_{ij} les matrices élémentaires. Écrivez la matrice de φ_A dans la base $(E_{11}, E_{21}, \dots, E_{n1}, E_{12}, \dots, E_{n2}, \dots, E_{1n}, \dots, E_{nn})$, puis démontrez que $\chi_{\varphi_A} = (\chi_A)^n$. (1 point)

Exercice 4 : Partie IV : lemme des noyaux et commutant (5 points)

On reprend la matrice C de la partie II, avec $n = 3$ et $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, et l'on note $\varphi = \varphi_C$.

- Donnez le polynôme minimal et le polynôme caractéristique de φ . (1 point)
- L'endomorphisme φ est-il diagonalisable ? Donnez la dimension de chacun de ses sous-espaces propres. (1 point)
- Justifiez que $\mathcal{M}_3(\mathbb{R}) = \ker(\varphi - \text{id})^2 \oplus \ker(\varphi - 2 \text{id})$. Calculez $(C - I_3)^2$, puis décrivez chacun de ces deux sous-espaces et donnez leur dimension. (1,5 point)
- Démontrez que le commutant $\mathcal{C}(C) = \{M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) : CM = MC\}$ est égal à $\mathbb{R}[C]$, et qu'il est de dimension 3. (1,5 point)



Réviser avant le contrôle : DS de réduction des endomorphismes

Avant de faire ce contrôle, relisez le cours « [Éléments propres](#) » en maths spé et « [Diagonalisation et trigonalisation](#) » en maths spé et « [Polynômes d'endomorphismes](#) » en maths spé puis entraînez-vous avec les **exercices corrigés** [éléments propres](#), [diagonalisation et trigonalisation](#), [polynômes d'endomorphismes](#).

Retrouvez tous les [contrôles de maths spé classés par chapitre](#), ou choisissez un autre niveau sur la page [contrôles de maths du CP au post-bac](#).

Autres contrôles de maths spé sur ce thème

- [Contrôle de maths spé : éléments propres et polynôme caractéristique](#)
- [Contrôle de maths spé : diagonalisation, trigonalisation et nilpotents](#)
- [Contrôle de maths spé : polynôme minimal, noyaux et Cayley-Hamilton](#)