Contrôle de maths spé : différentielle et règle de la chaîne

Fiche du contrôle

- **Niveau :** maths spé (MP)
- **Chapitre :** Calcul différentiel dans les espaces normés
- **Durée conseillée :** 2 h 30
- **Barème :** sur 20 points (exercice 1 : 4 points ; exercice 2 : 5 points ; exercice 3 : 3 points ; exercice 4 : 3 points ; exercice 5 : 5 points)
- **Compétences évaluées :**
  - Raisonner : relier différentielle, dérivées selon un vecteur et dérivées partielles, et construire un contre-exemple
  - Calculer : différentier des applications matricielles (carré, déterminant, inverse) et en déduire des gradients
  - Chercher : appliquer la règle de la chaîne à un changement de variables en coordonnées polaires
  - Représenter : déterminer une tangente ou un plan tangent comme noyau d'une différentielle

Exercice 1 : Question de cours (4 points)

Calculatrice interdite.

Dans tout le sujet, E et F sont des espaces vectoriels normés de dimension finie, et U est un ouvert non vide de E.

a. Donnez la définition de la différentiabilité en $a \in U$ d'une application $f : U \to F$.

Téléchargé depuis https://mathovore.fr - Mathovore site de maths.

Démontrez que si f est différentiable en a, alors f admet en a une dérivée selon tout vecteur v, égale à $df(a)(v)$. Déduisez-en, lorsque $E = \mathbb{R}^n$, l'expression de $df(a)(h)$ à l'aide des dérivées partielles. *(2 points)*

b. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = \dfrac{x^2\,y}{x^2+y^2}$ si $(x,y) \neq (0,0)$ et $f(0,0) = 0$. Montrez que f est continue en $(0,0)$ et admet en ce point une dérivée selon tout vecteur, mais qu'elle n'y est pas différentiable. *(2 points)*

Exercice 2 : Différentielles d'applications matricielles (5 points)

On munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ d'une norme sous-multiplicative $|||\cdot|||$ (telle que $|||AB||| \leq |||A|||\;|||B|||$).

a. Montrez que $f : M \to M^2$ est différentiable sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et donnez $df(M)(H)$. *(1 point)*

b. Justifiez que $\det$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. En développant $\det M$ selon la i-ème ligne, calculez $\dfrac{\partial \det}{\partial m_{ij}}(M)$ et montrez que $d\det(M)(H) = \operatorname{tr}\left({}^t\operatorname{Com}(M)\;H\right)$. Précisez $d\det(I_n)(H)$ et, pour M inversible, $d\det(M)(H)$ à l'aide de M^{-1}. *(2 points)*

c. Justifiez que $GL_n(\mathbb{R})$ est ouvert. Pour $M \in GL_n(\mathbb{R})$ et H assez petite, établissez l'égalité $(M+H)^{-1} = M^{-1} - M^{-1}\,H\,M^{-1} + M^{-1}\,H\,M^{-1}\,H\,(M+H)^{-1}$, puis montrez que $\operatorname{inv} : M \to M^{-1}$ est différentiable en M avec $d\operatorname{inv}(M)(H) = -M^{-1}\,H\,M^{-1}$. *(2 points)*

Exercice 3 : Gradients (3 points)

On munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ du produit scalaire $\langle A, B \rangle = \operatorname{tr}({}^t A\,B)$, et $\mathbb{R}^n$ de son produit scalaire canonique.

a. Déterminez le gradient en M de $\varphi : M \to \operatorname{tr}(M^2)$. *(1 point)*

b. Déterminez le gradient en M de $\det$, à l'aide de l'exercice 2. *(1 point)*

c. Déterminez le gradient en $x \neq 0$ de $N : x \to |x|$ sur $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. *(1 point)*

Exercice 4 : Règle de la chaîne en coordonnées polaires (3 points)

Soit $U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x, x > 0\}$, $V =]0, +\infty[\times]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ et $\Phi : (r, \theta) \to (r\cos\theta, r\sin\theta)$. On admet que Φ est une bijection de V sur U, de réciproque $(x, y) \to \left(\sqrt{x^2 + y^2}, \arctan\frac{y}{x}\right)$, et que Φ et sa réciproque sont de classe $\mathcal{C}^1$. Pour f de classe $\mathcal{C}^1$ sur U, on pose $g = f \circ \Phi$.

a. Exprimez $\frac{\partial g}{\partial r}$ et $\frac{\partial g}{\partial \theta}$ à l'aide des dérivées partielles de f. *(1 point)*

b. Montrez que $x \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + y \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = r \frac{\partial g}{\partial r}(r, \theta)$ lorsque $(x, y) = \Phi(r, \theta)$. *(0,5 point)*

c. Déterminez toutes les fonctions f de classe $\mathcal{C}^1$ sur U telles que $x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} = 0$ sur U. *(1,5 point)*

Exercice 5 : Problème : fonctions constantes et espace tangent (5 points)

Soit $f : U \to F$ différentiable sur l'ouvert U.

a. Soit $a, b \in U$ tels que le segment $[a, b]$ soit inclus dans U. Montrez que $\varphi : t \to f(a + t(b - a))$ est dérivable sur $[0, 1]$ et calculez $\varphi'(t)$. Déduisez-en que si $df = 0$ sur une boule ouverte incluse dans U, alors f est constante sur cette boule. *(1 point)*

b. On suppose U connexe par arcs et $df(x) = 0$ pour tout $x \in U$. Soit $a, x \in U$ et

Téléchargé depuis https://mathovore.fr - Mathovore site de maths.

$\gamma : [0,1] \to U$ continue avec $\gamma(0) = a$, $\gamma(1) = x$. En considérant $s = \sup\{ t \in [0,1] : f(\gamma(t))) = f(a)\}$, montrez que $f(x) = f(a)$. *(1,5 point)*

c. Montrez par un exemple que le résultat de b tombe en défaut si U n'est pas connexe par arcs. *(0,5 point)*

d. Soit $\mathcal{C} = \{(x,y) \in \mathbb{R} : x^2 + xy + y^2 = 3\}$. Vérifiez que $(1,1)$ et $(2,-1)$ appartiennent à $\mathcal{C}$, puis déterminez la tangente à $\mathcal{C}$ en chacun de ces points comme noyau d'une différentielle. *(1 point)*

e. Déterminez une équation du plan tangent en $(1,1,1)$ à la surface Σ d'équation $x^2 + y^2 - z^2 = 1$. *(1 point)*

Réviser avant le contrôle : différentielle et règle de la chaîne

Avant de faire ce contrôle, relisez le cours « Calcul différentiel » en maths spé puis entraînez-vous avec les **exercices corrigés** calcul différentiel.

Retrouvez tous les **contrôles de maths spé** classés par chapitre, ou choisissez un autre niveau sur la page contrôles de maths du CP au post-bac.