

Contrôle de maths spé : différentielle et règle de la chaîne

Fiche du contrôle

- **Niveau** : maths spé (MP)
- **Chapitre** : Calcul différentiel dans les espaces normés
- **Durée conseillée** : 2 h 30
- **Barème** : sur 20 points (exercice 1 : 4 points ; exercice 2 : 5 points ; exercice 3 : 3 points ; exercice 4 : 3 points ; exercice 5 : 5 points)
- **Compétences évaluées** :
 - Raisonner : relier différentielle, dérivées selon un vecteur et dérivées partielles, et construire un contre-exemple
 - Calculer : différentier des applications matricielles (carré, déterminant, inverse) et en déduire des gradients
 - Chercher : appliquer la règle de la chaîne à un changement de variables en coordonnées polaires
 - Représenter : déterminer une tangente ou un plan tangent comme noyau d'une différentielle

Exercice 1 : Question de cours (4 points)

Calculatrice interdite.

Dans tout le sujet, E et F sont des espaces vectoriels normés de dimension finie, et U est un ouvert non vide de E .

- a. Donnez la définition de la différentiabilité en $a \in U$ d'une application $f : U \rightarrow F$.

Démontrez que si f est différentiable en a , alors f admet en a une dérivée selon tout vecteur v , égale à $df(a)(v)$. Déduisez-en, lorsque $E = \mathbb{R}^n$, l'expression de $df(a)(h)$ à l'aide des dérivées partielles. (2 points)

- b. Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = \frac{x^2 y}{x^2 + y^2}$ si $(x, y) \neq (0, 0)$ et $f(0, 0) = 0$. Montrez que f est continue en $(0, 0)$ et admet en ce point une dérivée selon tout vecteur, mais qu'elle n'y est pas différentiable. (2 points)

Exercice 2 : Différentielles d'applications matricielles (5 points)

On munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ d'une norme sous-multiplicative $\|\cdot\|$ (telle que $\|AB\| \leq \|A\| \|B\|$).

- a. Montrez que $f : M \rightarrow M^2$ est différentiable sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et donnez $df(M)(H)$. (1 point)
- b. Justifiez que $\det$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. En développant $\det M$ selon la i -ème ligne, calculez $\frac{\partial \det}{\partial m_{ij}}(M)$ et montrez que $d\det(M)(H) = \text{tr}({}^t \text{Com}(M) H)$. Précisez $d\det(I_n)(H)$ et, pour M inversible, $d\det(M)(H)$ à l'aide de M^{-1} . (2 points)
- c. Justifiez que $GL_n(\mathbb{R})$ est ouvert. Pour $M \in GL_n(\mathbb{R})$ et H assez petite, établissez l'égalité $(M + H)^{-1} = M^{-1} - M^{-1} H M^{-1} + M^{-1} H M^{-1} H (M + H)^{-1}$, puis montrez que $\text{inv} : M \rightarrow M^{-1}$ est différentiable en M avec $d\text{inv}(M)(H) = -M^{-1} H M^{-1}$. (2 points)

Exercice 3 : Gradients (3 points)

On munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ du produit scalaire $\langle A, B \rangle = \text{tr}({}^t A B)$, et $\mathbb{R}^n$ de son produit scalaire canonique.

- a. Déterminez le gradient en M de $\varphi : M \rightarrow \text{tr}(M^2)$. (1 point)

- b. Déterminez le gradient en M de $\det$, à l'aide de l'exercice 2. (1 point)
- c. Déterminez le gradient en $x \neq 0$ de $N : x \rightarrow |x|$ sur $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. (1 point)

Exercice 4 : Règle de la chaîne en coordonnées polaires (3 points)

Soit $U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x, y > 0\}$, $V =]0, +\infty[\times]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ et $\Phi : (r, \theta) \rightarrow (r \cos \theta, r \sin \theta)$. On admet que Φ est une bijection de V sur U , de réciproque $(x, y) \rightarrow (\sqrt{x^2 + y^2}, \arctan \frac{y}{x})$, et que Φ et sa réciproque sont de classe $\mathcal{C}^1$. Pour f de classe $\mathcal{C}^1$ sur U , on pose $g = f \circ \Phi$.

- a. Exprimez $\frac{\partial g}{\partial r}$ et $\frac{\partial g}{\partial \theta}$ à l'aide des dérivées partielles de f . (1 point)
- b. Montrez que $x \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + y \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = r \frac{\partial g}{\partial r}(r, \theta)$ lorsque $(x, y) = \Phi(r, \theta)$. (0,5 point)
- c. Déterminez toutes les fonctions f de classe $\mathcal{C}^1$ sur U telles que $x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} = 0$ sur U . (1,5 point)

Exercice 5 : Problème : fonctions constantes et espace tangent (5 points)

Soit $f : U \rightarrow F$ différentiable sur l'ouvert U .

- a. Soit $a, b \in U$ tels que le segment $[a, b]$ soit inclus dans U . Montrez que $\varphi : t \rightarrow f(a + t(b - a))$ est dérivable sur $[0, 1]$ et calculez $\varphi'(t)$. Déduisez-en que si $df = 0$ sur une boule ouverte incluse dans U , alors f est constante sur cette boule. (1 point)
- b. On suppose U connexe par arcs et $df(x) = 0$ pour tout $x \in U$. Soit $a, x \in U$ et

$\gamma: [0, 1] \rightarrow U$ continue avec $\gamma(0) = a$, $\gamma(1) = x$. En considérant $s = \sup\{t \in [0, 1] : f(\gamma(t)) = f(a)\}$, montrez que $f(x) = f(a)$. (1,5 point)

- c. Montrez par un exemple que le résultat de b tombe en défaut si U n'est pas connexe par arcs. (0,5 point)
- d. Soit $\mathcal{C} = \{(x, y) \in \mathbb{R} : x^2 + xy + y^2 = 3\}$. Vérifiez que $(1, 1)$ et $(2, -1)$ appartiennent à $\mathcal{C}$, puis déterminez la tangente à $\mathcal{C}$ en chacun de ces points comme noyau d'une différentielle. (1 point)
- e. Déterminez une équation du plan tangent en $(1, 1, 1)$ à la surface Σ d'équation $x^2 + y^2 - z^2 = 1$. (1 point)



Réviser avant le contrôle : différentielle et règle de la chaîne

Avant de faire ce contrôle, relisez le cours « [Calcul différentiel](#) » en maths spé puis entraînez-vous avec les **exercices corrigés** [calcul différentiel](#).

Retrouvez tous les [contrôles de maths spé classés par chapitre](#), ou choisissez un autre niveau sur la page [contrôles de maths du CP au post-bac](#).