

Contrôle de maths spé : diagonalisation, trigonalisation et nilpotents

Fiche du contrôle

- **Niveau** : maths spé (MP)
- **Chapitre** : Diagonalisation, trigonalisation et nilpotence
- **Durée conseillée** : 3 heures
- **Barème** : sur 20 points (exercice 1 : 3 points ; exercice 2 : 5 points ; exercice 3 : 4 points ; exercice 4 : 3 points ; exercice 5 : 5 points)
- **Compétences évaluées** :
 - Raisonner : démontrer le critère de diagonalisabilité par les multiplicités
 - Calculer : diagonaliser une matrice 3×3 et en déduire ses puissances
 - Représenter : trigonaliser une matrice non diagonalisable dans une base adaptée
 - Chercher : caractériser les matrices nilpotentes et les matrices de rang 1

Exercice 1 : Question de cours (3 points)

Calculatrice interdite.

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) et $u \in \mathcal{L}(E)$. On pourra utiliser sans démonstration le fait que les sous-espaces propres sont en somme directe, et l'inégalité $\dim E_\lambda(u) \leq m(\lambda)$, où $m(\lambda)$ est la multiplicité de λ dans X_u .

- Énoncez le critère de diagonalisabilité de u faisant intervenir X_u et les dimensions des sous-espaces propres. (1 point)
- Démontrez ce critère. (2 points)

Exercice 2 : Diagonalisation et puissances (5 points)

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

- Calculez le polynôme caractéristique de A et donnez son spectre. (1 point)
- Déterminez les sous-espaces propres de A . Justifiez que A est diagonalisable. Vérifiez qu'avec $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, la matrice $P^{-1}AP$ est diagonale, et précisez-la. (1,5 point)
- Calculez P^{-1} . (0,5 point)
- Calculez A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$. (1,5 point)
- On définit trois suites par $x_0 = 0$, $y_0 = 1$, $z_0 = 0$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
 $x_{n+1} = 2x_n + y_n - z_n$, $y_{n+1} = 2y_n$, $z_{n+1} = y_n + z_n$. Exprimez x_n , y_n et z_n en fonction de n . (0,5 point)

Exercice 3 : Trigonalisation d'une matrice (4 points)

On considère la matrice $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & \\ , & 0 & \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

- Calculez le polynôme caractéristique de B et son spectre. (1 point)
- Déterminez le sous-espace propre de B et justifiez que B n'est pas diagonalisable. (1 point)
- Déterminez une matrice inversible P et une matrice triangulaire supérieure T telles que $B = PTP^{-1}$. (1,5 point)

- d. On pose $N = B - 2I_3$. Calculez N^2 , puis déduisez-en B^n pour tout $n \geq 1$. (0,5 point)

Exercice 4 : Matrices nilpotentes (3 points)

Soit $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice nilpotente non nulle, d'indice p : $N^p = 0$ et $N^{p-1} \neq 0$.

- Montrez que $\text{Sp}(N) = \{0\}$, puis que $\chi_N = X^n$. (1,5 point)
- Soit $x \in \mathbb{C}^n$ tel que $N^{p-1}x \neq 0$. Montrez que la famille $(x, Nx, \dots, N^{p-1}x)$ est libre. Déduisez-en que $p \leq n$. (1 point)
- Montrez que $\text{tr}(N^k) = 0$ pour tout entier $k \geq 1$. (0,5 point)

Exercice 5 : Matrices de rang 1 (5 points)

Soit $n \geq 2$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice de rang 1. On note $V^\top$ la transposée d'une colonne V .

- Montrez qu'il existe deux colonnes non nulles U et V de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ telles que $A = UV^\top$. (1 point)
- Montrez que $V^\top U = \text{tr}(A)$, puis que $A^2 = \text{tr}(A) A$. (1 point)
- Montrez que 0 est valeur propre de A avec $\dim E_0(A) = n - 1$, que $AU = \text{tr}(A)U$, et déduisez-en que $\chi_A = X^{n-1}(X - \text{tr}(A))$. (1,5 point)
- Montrez que A est diagonalisable si et seulement si $\text{tr}(A) \neq 0$. (1 point)
- Les matrices $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ -1 & -2 & -3 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ sont-elles

diagonalisables ? Donnez leur polynôme caractéristique. (0,5 point)



Réviser avant le contrôle : diagonalisation, trigonalisation et nilpotents

Avant de faire ce contrôle, relisez le cours [« Diagonalisation et trigonalisation » en maths spé](#) puis entraînez-vous avec les **exercices corrigés** [diagonalisation et trigonalisation](#).

Retrouvez tous les [contrôles de maths spé classés par chapitre](#), ou choisissez un autre niveau sur la page [contrôles de maths du CP au post-bac](#).

Autres contrôles de maths spé sur ce thème

- [Contrôle de maths spé : DS de réduction des endomorphismes](#)