Contrôle de maths spé : convergence dominée, intégration terme à terme

Fiche du contrôle

- **Niveau :** maths spé (MP)
- **Chapitre :** Convergence dominée et intégration terme à terme
- **Durée conseillée :** 3 heures
- **Barème :** sur 20 points (exercice 1 : 3 points ; exercice 2 : 4 points ; exercice 3 : 4 points ; exercice 4 : 4 points ; exercice 5 : 5 points)
- **Compétences évaluées :**
  - Raisonner : vérifier par écrit chaque hypothèse du théorème de convergence dominée
  - Chercher : trouver une fonction dominante intégrable indépendante de n
  - Calculer : développer une fonction en série puis intégrer terme à terme pour obtenir une somme exacte
  - Communiquer : énoncer précisément les théorèmes d'interversion limite-intégrale et série-intégrale

Exercice 1 : Question de cours : les deux théorèmes d'interversion (3 points)

Calculatrice interdite.

Dans cet exercice, I est un intervalle de $\mathbb{R}$ et les fonctions sont à valeurs réelles ou complexes.

a. Énoncez précisément le théorème de convergence dominée pour une suite de fonctions (f_n) définies sur I. *(1,5 point)*

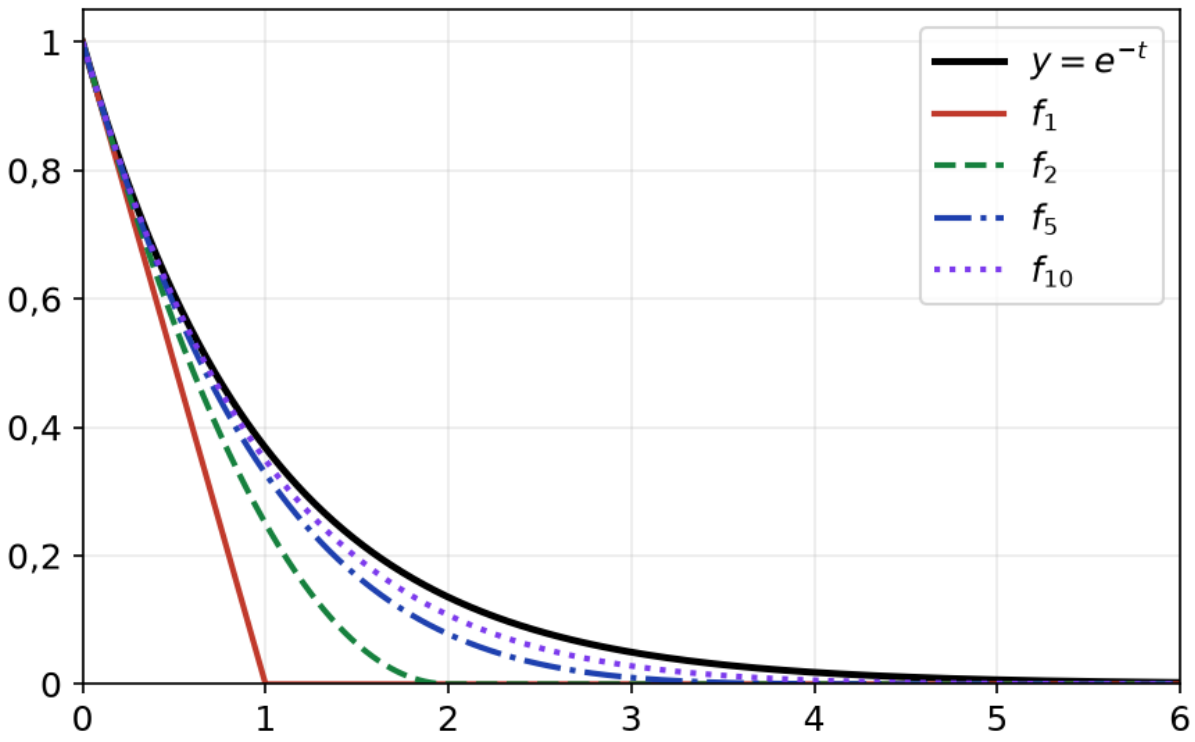
b. Énoncez précisément le théorème d'intégration terme à terme pour une série de fonctions

Téléchargé depuis https://mathovore.fr - Mathovore site de maths.

$\sum f_n$ définies sur I. *(1,5 point)*

Exercice 2 : Limite d'une intégrale sur un intervalle variable (4 points)

Pour $n \geq 1$, on pose $I_n = \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n dt$ et on définit f_n sur $[0,+\infty[$ par $f_n(t) = \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n$ si $t \in [0,n]$ et $f_n(t) = 0$ si $t > n$. La figure représente quelques fonctions f_n et la fonction $t \to e^{-t}$.



a. Déterminez la limite simple de (f_n) sur $[0,+\infty[$. *(1 point)*

b. Montrez que $\ln(1-u) \leq -u$ pour tout $u \in [0,1[$. Déduisez-en que $0 \leq f_n(t) \leq e^{-t}$ pour tout $t \geq 0$. *(1,5 point)*

c. Déterminez la limite de (I_n) en vérifiant chaque hypothèse du théorème utilisé. *(0,5 point)*

d. Calculez I_n directement et retrouvez ce résultat. *(1 point)*

Exercice 3 : Deux limites par changement de variable (4 points)

a. Soit f une fonction continue sur $[0,1]$. Pour $n \geq 1$, on pose $K_n = \int_0^1 \frac{n\, f(t)}{1+n^2t^2}\, dt$. À l'aide du changement de variable $u = nt$, montrez que $K_n \to \frac{\pi}{2} f(0)$. *(2,5 points)*

b. Pour $n \geq 1$, on pose $J_n = \int_0^1 \frac{dt}{1+t^n}$. Montrez que $n(1-J_n) = \int_0^1 \frac{u^{1/n}}{1+u}\, du$, puis que $J_n = 1 - \frac{\ln 2}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$. *(1,5 point)*

Exercice 4 : Une intégrale calculée comme somme de série (4 points)

On admet que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$. On pose $g(t) = \frac{t}{e^t - 1}$ pour $t > 0$.

a. Montrez que g est intégrable sur $]0,+\infty[$. *(0,5 point)*

b. Montrez que, pour tout $t > 0$, $g(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} t\, e^{-nt}$. *(1 point)*

c. Calculez $\int_0^{+\infty} t\, e^{-nt}\, dt$ pour $n \geq 1$, puis justifiez l'intégration terme à terme. *(2 points)*

d. Déduisez-en la valeur de $\int_0^{+\infty} \frac{t}{e^t - 1}\, dt$. *(0,5 point)*

Téléchargé depuis https://mathovore.fr - Mathovore site de maths.

Exercice 5 : Problème : intégrale du produit de deux logarithmes (5 points)

On étudie $L = \int_0^1 \ln(t)\ln(1-t)\,dt$. On admet encore que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

a. Montrez que la fonction $h : t \to \ln(t)\ln(1-t)$ se prolonge par continuité sur $[0,1]$. Déduisez-en que L est bien définie. *(1 point)*

b. Pour $n \in \mathbb{N}$, calculez $\int_0^1 t^n \ln t\,dt$. *(1 point)*

c. Écrivez $h(t)$ comme la somme d'une série de fonctions positives sur $]0,1[$, puis justifiez que $L = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)^2}$. *(1,5 point)*

d. Vérifiez que $\frac{1}{n(n+1)^2} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{(n+1)^2}$, puis calculez L. *(1,5 point)*

Réviser avant le contrôle : convergence dominée, intégration terme à terme

Avant de faire ce contrôle, relisez le cours « Convergence dominée » en maths spé puis entraînez-vous avec les **exercices corrigés** convergence dominée.

Retrouvez tous les **contrôles de maths spé** classés par chapitre, ou choisissez un autre niveau sur la page contrôles de maths du CP au post-bac.