

Contrôle de maths spé : compacité, connexité par arcs, dimension finie

Fiche du contrôle

- **Niveau** : maths spé (MP)
- **Chapitre** : Compacité, connexité par arcs et dimension finie
- **Durée conseillée** : 3 heures
- **Barème** : sur 20 points (exercice 1 : 4 points ; exercice 2 : 4 points ; exercice 3 : 5 points ; exercice 4 : 3 points ; exercice 5 : 4 points)
- **Compétences évaluées** :
 - Raisonner : prouver l'existence d'un extremum par compacité
 - Chercher : construire un chemin continu entre deux matrices inversibles
 - Calculer : établir ou infirmer la continuité uniforme sur des exemples
 - Communiquer : exploiter la dimension finie en citant l'équivalence des normes

Exercice 1 : Question de cours : bornes atteintes et dimension finie (4 points)

Calculatrice interdite. Documents interdits.

Une partie K d'un espace normé est dite compacte si toute suite d'éléments de K admet une suite extraite qui converge dans K .

- Énoncez et démontrez le théorème des bornes atteintes pour une fonction f continue sur une partie compacte non vide K , à valeurs réelles. (2 points)
- Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$, de base $(e_1, \dots, e_n)$, et

$N_\infty\left(\sum x_i e_i\right) = \max_i |x_i|$. On admet que la sphère $S = \{x \in E : N_\infty(x) = 1\}$ est compacte dans (E, N_∞) . Soit N une norme sur E .

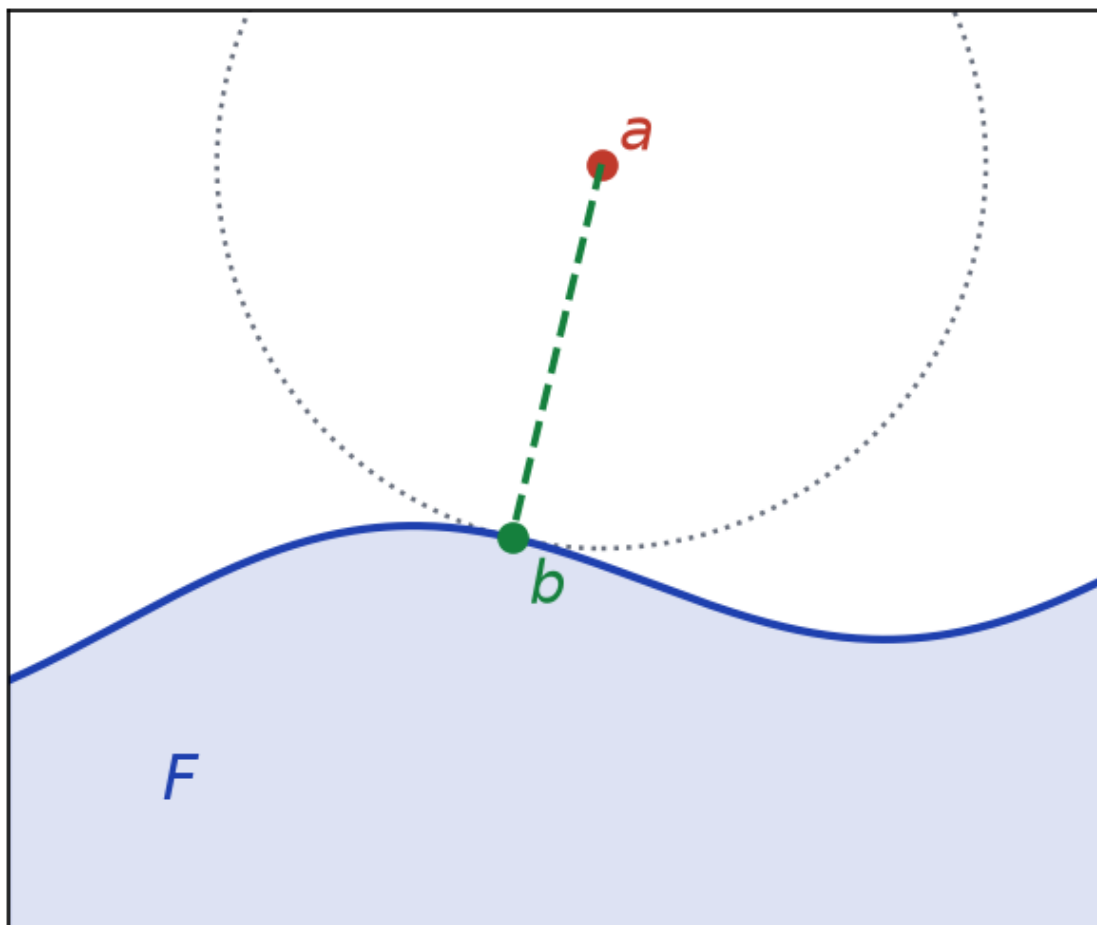
Démontrez qu'il existe $C > 0$ tel que $N \leq C N_\infty$, que N est continue sur (E, N_∞) , puis qu'il existe $m > 0$ tel que $N \geq m N_\infty$. Énoncez le théorème obtenu. (2 points)

Exercice 2 : Compacité de $O_n(\mathbb{R})$ et distance à un fermé (4 points)

Soit $n \geq 2$. On munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de la norme $|M| = \max_{i,j} |m_{ij}|$, et l'on note $O_n(\mathbb{R}) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) : M^T M = I_n\}$.

a. Démontrez que $O_n(\mathbb{R})$ est une partie compacte de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. (1,5 point)

b. Soit E un espace normé de dimension finie, F un fermé non vide de E et $a \in E$. On note $d(a, F) = \inf_{x \in F} |a - x|$. Démontrez qu'il existe $b \in F$ tel que $|a - b| = d(a, F)$. (1,5 point)



- c. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Démontrez qu'il existe $O_0 \in O_n(\mathbb{R})$ tel que $\text{tr}(A O_0) = \max_{O \in O_n(\mathbb{R})} \text{tr}(A O)$. (1 point)

Exercice 3 : Connexité par arcs des groupes linéaires (5 points)

Dans cet exercice, $n \geq 1$ est un entier et les espaces de matrices sont munis d'une norme quelconque (elles sont toutes équivalentes).

- a. Soient $A, B \in GL_n(\mathbb{C})$. On pose $P(z) = \det((1-z)A + zB)$ pour $z \in \mathbb{C}$.

Justifiez que P est une fonction polynomiale non nulle, qui ne s'annule ni en 0 ni en 1.

Construisez ensuite un chemin continu $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$, avec $\gamma(0) = 0$ et $\gamma(1) = 1$, qui

évite les racines de P . On pourra chercher $\gamma(t) = t + i\alpha t(1-t)$ avec α réel bien choisi. Concluez que $GL_n(\mathbb{C})$ est connexe par arcs. (2,5 points)

b. Démontrez que $GL_n(\mathbb{R})$ n'est pas connexe par arcs. (1,5 point)

c. Soit X une partie connexe par arcs d'un espace normé et $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ continue, à valeurs dans $\mathbb{Z}$. Démontrez que f est constante. (1 point)

Exercice 4 : Théorème de Heine sur des exemples (3 points)

a. Énoncez le théorème de Heine. Dédisez-en que la fonction racine carrée est uniformément continue sur $[0, 1]$. (1 point)

b. Démontrez que $|\sqrt{x} - \sqrt{y}| \leq \sqrt{|x - y|}$ pour tous $x, y \geq 0$. Qu'en déduisez-vous sur $[0, +\infty[$, qui n'est pas compact ? (1 point)

c. Démontrez que $x \rightarrow x^2$ n'est pas uniformément continue sur $\mathbb{R}$. (1 point)

Exercice 5 : Problème : composantes connexes par arcs des projecteurs (4 points)

Soit $n \geq 2$. On note $\mathcal{P} = \{M \in M_n(\mathbb{C}) : M^2 = M\}$ et, pour $r \in \{0, \dots, n\}$, $\mathcal{P}_r$ l'ensemble des éléments de $\mathcal{P}$ de rang r . On note J_r la matrice diagonale dont les r premiers coefficients diagonaux valent 1 et les autres 0.

a. Démontrez que $\mathcal{P}$ est fermé. Démontrez que tout $M \in \mathcal{P}$ est semblable à J_r avec $r = \text{rg } M$, et que $\text{tr } M = \text{rg } M$. (1 point)

b. Démontrez que $\mathcal{P}_r = \{Q J_r Q^{-1} : Q \in GL_n(\mathbb{C})\}$, puis que $\mathcal{P}_r$ est connexe par arcs. (1,5 point)

c. Démontrez que $\mathcal{P}_r$ est fermé. Pour quelles valeurs de r est-il compact ? On pourra étudier $J_r + t E_{1n}$ pour t réel. (1 point)

- d. Démontrez que les composantes connexes par arcs de $\mathcal{P}$ sont exactement $\mathcal{P}_0, \dots, \mathcal{P}_n$. (0,5 point)



Réviser avant le contrôle : compacité, connexité par arcs, dimension finie

Avant de faire ce contrôle, relisez le cours « [Compacité et connexité par arcs](#) » en maths spé puis entraînez-vous avec les **exercices corrigés** [compacité et connexité par arcs](#).

Retrouvez tous les [contrôles de maths spé classés par chapitre](#), ou choisissez un autre niveau sur la page [contrôles de maths du CP au post-bac](#).