Contrôle de maths spé : adjoint, matrices orthogonales et isométries

Fiche du contrôle

- **Niveau :** maths spé (MP)
- **Chapitre :** Adjoint et isométries d'un espace euclidien
- **Durée conseillée :** 2 heures 30
- **Barème :** sur 20 points (exercice 1 : 4 points ; exercice 2 : 5 points ; exercice 3 : 4 points ; exercice 4 : 7 points)
- **Compétences évaluées :**
  - Raisonner : démontrer l'existence de l'adjoint et la stabilité de l'orthogonal
  - Calculer : reconnaître une matrice orthogonale et déterminer l'axe et l'angle d'une rotation
  - Représenter : interpréter géométriquement réflexions et rotations du plan et de l'espace
  - Chercher : réduire une isométrie en blocs par récurrence sur la dimension

Exercice 1 : Question de cours : adjoint d'un endomorphisme (4 points)

Calculatrice interdite. Documents interdits.

Soit E un espace euclidien de dimension $n \geq 1$, de produit scalaire noté $\langle \cdot, \cdot \rangle$, et $u \in \mathcal{L}(E)$.

a. Démontrez qu'il existe un unique endomorphisme u^* de E tel que $\langle u(x), y \rangle = \langle x, u^*(y) \rangle$ pour tous $x, y \in E$. On pourra utiliser le théorème de représentation des formes linéaires. *(1,5 point)*

Téléchargé depuis https://mathovore.fr - Mathovore site de maths.

b. Soit $\mathcal{B}$ une base orthonormée de E et M la matrice de u dans $\mathcal{B}$. Montrez que la matrice de u^* dans $\mathcal{B}$ est $M^\top$. *(1 point)*

c. Montrez que si un sous-espace F de E est stable par u, alors $F^\perp$ est stable par u^*. *(1,5 point)*

Exercice 2 : Une rotation de l'espace (5 points)

L'espace $\mathbb{R}^3$ est muni de sa structure euclidienne canonique et orienté par sa base canonique (e_1, e_2, e_3). On considère

$$A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

a. Montrez que A est une matrice orthogonale. *(1 point)*

b. Calculez $\det A$ et en déduire la nature de l'endomorphisme f canoniquement associé à A. *(1 point)*

c. Déterminez l'axe de f. *(1 point)*

d. On oriente l'axe par le vecteur $u = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)$. Déterminez l'angle $\theta \in \left]-\pi, \pi\right]$ de la rotation f, en utilisant la trace puis le signe de $\det(u, e_1, f(e_1))$. *(1,5 point)*

e. Déterminez le plus petit entier $k \geq 1$ tel que $A^k = I_3$. *(0,5 point)*

Exercice 3 : Réflexions et isométries du plan (4 points)

a. Dans $\mathbb{R}^3$ euclidien canonique, on note P le plan d'équation $x - 2y + 2z = 0$ et s la réflexion par rapport à P. Montrez que $s(x) = x - 2\frac{\langle x, n \rangle}{|n|^2} n$ avec $n = (1, -2, 2)$, puis écrivez la matrice S de s dans la base canonique. Vérifiez que S est symétrique et

orthogonale. *(1,5 point)*

b. Montrez que les matrices de $O_2(\mathbb{R})$ sont exactement les matrices

$$R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\nu\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \text{ et } S(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\text{tr}\theta & -\cos\theta \end{pmatrix},\ \theta \in \mathbb{R},$$

et précisez la nature géométrique de l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ associé à $S(\theta)$. *(1,5 point)*

c. Calculez $S(\alpha)\,S(\beta)$ pour $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ et interprétez le résultat. *(1 point)*

Exercice 4 : Problème : réduction des isométries (7 points)

Soit E un espace euclidien de dimension $n \geq 1$ et $u \in O(E)$ une isométrie vectorielle de E.

a. Montrez que $u^* = u^{-1}$ et que les seules valeurs propres réelles possibles de u sont 1 et -1. *(1 point)*

b. Soit F un sous-espace stable par u. Montrez que $u(F) = F$, que F est stable par u^*, puis que $F^\perp$ est stable par u. *(1 point)*

c. Soit M la matrice de u dans une base orthonormée $\mathcal{B}$. On considère une valeur propre complexe $\lambda = a + ib$ de M (avec $b \neq 0$) et un vecteur propre associé $Z = X + iY$, où $X, Y \in \mathbb{R}^n$. Montrez que $MX = aX - bY$ et $MY = bX + aY$. En déduire que u admet toujours une droite ou un plan stable. *(1 point)*

d. Montrez par récurrence sur n qu'il existe une base orthonormée de E dans laquelle la matrice de u est diagonale par blocs, avec des blocs (1), (-1) et des blocs $R(\theta)$ avec $\theta \in \mathbb{R}$. On pourra utiliser l'exercice 3. *(1,5 point)*

e. On suppose $n = 3$ et $\det u = 1$. Déduisez de d) que 1 est valeur propre de u et qu'il existe une base orthonormée où la matrice de u est $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\text{tr}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$. *(1 point)*

f. Dans $\mathbb{R}^4$ euclidien canonique, on considère $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Justifiez que B est orthogonale, puis déterminez une base orthonormée de $\mathbb{R}^4$ dans laquelle la matrice de l'endomorphisme associé est diagonale par blocs de la forme précédente, en précisant ces blocs.

Téléchargé depuis https://mathovore.fr - Mathovore site de maths.

(1,5 point)

Réviser avant le contrôle : adjoint, matrices orthogonales et isométries

Avant de faire ce contrôle, relisez le cours « Isométries vectorielles » en maths spé puis entraînez-vous avec les **exercices corrigés** isométries vectorielles.

Retrouvez tous les **contrôles de maths spé** classés par chapitre, ou choisissez un autre niveau sur la page contrôles de maths du CP au post-bac.