

Contrôle de maths L3 : tribus, mesures et fonctions mesurables

Fiche du contrôle

- **Niveau** : licence L3
- **Chapitre** : Tribus, mesures et fonctions mesurables
- **Durée conseillée** : 1 heure 30
- **Barème** : sur 20 points (exercice 1 : 4 points ; exercice 2 : 4 points ; exercice 3 : 4 points ; exercice 4 : 3 points ; exercice 5 : 5 points)
- **Compétences évaluées** :
 - Raisonner : démontrer la continuité monotone d'une mesure à partir de la sigma-additivité
 - Chercher : décrire une tribu engendrée par ses atomes
 - Calculer : évaluer la mesure de Lebesgue d'intersections décroissantes
 - Communiquer : rédiger une preuve de mesurabilité par passage aux images réciproques

Exercice 1 : Question de cours, continuité monotone d'une mesure (4 points)

Calculatrice interdite. Documents interdits. Durée : 1 heure 30.

Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré.

- a. Soit $(A_n)_n \geq 0$ une suite croissante d'éléments de $\mathcal{A}$. Démontrez que
- $$\mu\left(\bigcup_n A_n\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mu(A_n), \text{ en utilisant la sigma-additivité de } \mu. \text{ (2 points)}$$
- b. Soit $(B_n)_n \geq 0$ une suite décroissante d'éléments de $\mathcal{A}$ avec $\mu(B_0) < +\infty$. Démontrez

que $\mu\left(\bigcap_n B_n\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mu(B_n)$. (1 point)

c. On note λ la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$ et $B_n = [n, +\infty[$. Calculez $\lambda(B_n)$ et $\lambda\left(\bigcap_n B_n\right)$. Quelle hypothèse de la question b) est mise en défaut ? (1 point)

Exercice 2 : Une tribu engendrée finie (4 points)

On pose $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $A = \{1, 2\}$, $B = \{2, 3\}$, et l'on note $\mathcal{T} = \sigma(\{A, B\})$ la tribu engendrée par A et B .

- a. Montrez que les quatre parties $\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$ et $\{4, 5, 6\}$ appartiennent à $\mathcal{T}$. (1 point)
- b. On note $\mathcal{U}$ l'ensemble des réunions (éventuellement vides) de ces quatre parties. Montrez que $\mathcal{U}$ est une tribu, puis que $\mathcal{T} = \mathcal{U}$. Donnez le cardinal de $\mathcal{T}$. (2 points)
- c. Une fonction $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ est-elle $\mathcal{T}$ -mesurable dans chacun des cas suivants :
 $f(\omega) = (\omega - 2)^2$; $f(\omega) = \min(\omega, 4)$? Justifiez. (1 point)

Exercice 3 : Générateurs de la tribu borélienne (4 points)

On note $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ la tribu borélienne de $\mathbb{R}$, engendrée par les ouverts, et $\mathcal{C} = \sigma(\{]-\infty, a] : a \in \mathbb{R} \})$.

- a. Montrez que $\mathcal{C} \subset \mathcal{B}(\mathbb{R})$. (1 point)
- b. Soient $a < b$ deux réels. Montrez que $]-\infty, b[$ puis $]a, b[$ appartiennent à $\mathcal{C}$. (1,5 point)
- c. Soit U un ouvert de $\mathbb{R}$. Montrez que U est la réunion des intervalles $]p, q[$ inclus dans U avec p et q rationnels. Concluez que $\mathcal{C} = \mathcal{B}(\mathbb{R})$. (1,5 point)

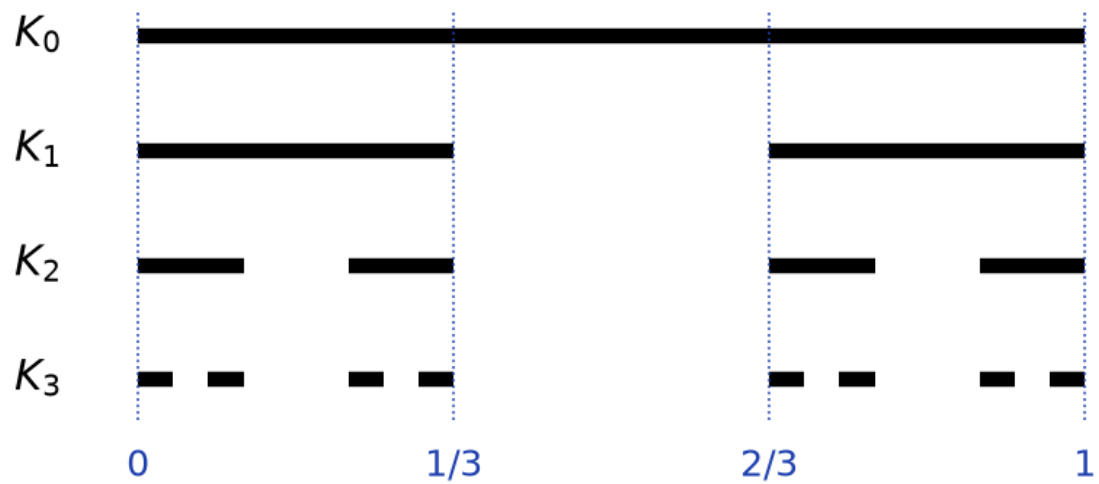
Exercice 4 : Mesurabilité du sup et de la limite supérieure (3 points)

Soit $(X, \mathcal{A})$ un espace mesurable et $(f_n)_n \geq 0$ une suite de fonctions mesurables de X dans $\mathbb{R}$. On admet que la tribu borélienne de $\bar{\mathbb{R}} = [-\infty, +\infty]$ est engendrée par les intervalles $[-\infty, a]$, $a \in \mathbb{R}$.

- Montrez que $g = \sup_n f_n$, à valeurs dans $\bar{\mathbb{R}}$, est mesurable. (1 point)
- Déduisez-en que $\limsup_n f_n$ et $\liminf_n f_n$ sont mesurables, puis que l'ensemble C des points x où la suite $(f_n(x))$ converge dans $\mathbb{R}$ appartient à $\mathcal{A}$. (1 point)
- Soit $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue. Montrez que $h \circ f_0$ est mesurable. Appliquez ce résultat à $|f_0|$ et à $f_0^+ = \max(f_0, 0)$. (1 point)

Exercice 5 : Problème, ensembles négligeables et ensemble de Cantor (5 points)

On note λ la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$. On pose $K_0 = [0, 1]$ et, pour tout $n \geq 0$, $K_{n+1} = \frac{1}{3} K_n \cup \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{3} K_n \right)$. La figure représente K_0 , K_1 , K_2 et K_3 .



On admet que K_n est la réunion disjointe des 2^n intervalles $[s, s + 3^{-n}]$, où $s = \sum_{k=1}^n a_k 3^{-k}$ avec $a_1, \dots, a_n \in \{0, 2\}$, et l'on pose $K = \bigcap_{n \geq 0} K_n$.

- Montrez que $\mathbb{Q}$ est négligeable pour λ . (1 point)
- Montrez que la suite (K_n) est décroissante et calculez $\lambda(K_n)$. (1 point)
- Montrez que K est un compact non vide et que $\lambda(K) = 0$. (1 point)
- À toute suite $a = (a_k)_{k \geq 1}$ à valeurs dans $\{0, 2\}$, on associe $\Phi(a) = \sum_{k=1}^{+\infty} a_k 3^{-k}$.
Montrez que $\Phi(a) \in K$, puis que Φ est injective. Que peut-on en déduire sur K ? (1 point)
- Montrez que K ne contient aucun intervalle de longueur strictement positive. (1 point)



Réviser avant le contrôle : tribus, mesures et fonctions mesurables

Avant de faire ce contrôle, relisez le cours « [Tribus et mesures](#) » en L3 puis entraînez-vous avec les **exercices corrigés** [tribus et mesures](#).

Retrouvez tous les [contrôles de maths de L3 classés par chapitre](#), ou choisissez un autre niveau sur la page [contrôles de maths du CP au post-bac](#).